МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

Л. Б. Коваленко

В И Щ А М А Т Е М А Т И К А

д л я м е н е д ж е р і в

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Харків ХНАМГ 2010

УДК 51-7:658 (075)
ББК 22.11+65.050я7
К56

Рецензенти:

А. Д. Тевяшев, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики (Харківський національний університет радіоелектроніки)
О. О. Стрельнікова, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник (інститут проблем машинобудування ім. А.М. Подгорного НАН України)
А. П. Харченко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики (Харківський державний технічний університет будівництва і архітектури)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(*лист № 1/11-1392 від 05.03.2010 р*.)

Коваленко Л. Б.
К56 Вища математика для менеджерів: навч. посібник / Л.Б. Коваленко; Харк. нац. акад.. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 292 С.
ISBN 978-966-695-157-4

Навчальний посібник побудований за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу та узгоджений з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для студентів спеціальностей менеджменту.

УДК 51-7: 658 (075)
ББК 22.1 + 65.050 я7

ISBN 978-966-695-157-4

Передмова

Навчальний посібник побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика». Доступне, коректне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого. Особливістю представленого посібника є наочне доведення необхідності у вивчанні саме запропонованих тем: кожен розділ супроводжується розгляданням задач з економічним змістом. Цей прийом дозволяє переконати читача у неперервності освіти, у зв'язку фундаментальних дисциплін з вузькими спецкурсами.

Сучасні програми навчання приділяють велику увагу самостійний, позааудиторній роботі студентів, тому частина запропонованого у посібнику теоретичного матеріалу може бути винесена на самостійний розгляд студентами.

Основою даного посібника є цикли лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті менеджменту Харківської національної академії міського господарства.

Посібник призначений для студентів-менеджерів інженерно-економічних вузів, а також може використовуватися для самоосвіти.

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. ВИЗНАЧНИКИ

Визначення 1.1. ***Визначником*** n-го порядку називається число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Позначають визначник ще як det від $determinate$ - «визначати», або $|a_{ij}|$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$.

Визначення 1.2. Числа a_{ij} -називаються ***елементами визначника***, де i - номер рядка, а j – номер стовпця.

Елементи a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \dots$, a_{nn} утворюють головну діагональ визначника.

Основні властивості визначників:

1. Величина визначника не зміниться, якщо елементи рядків та стовпців змінити місцями.
2. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, такий визначник дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), такий визначник дорівнює нулю.
4. Якщо визначник має два пропорційні рядка (стовпця), такий визначник дорівнює нулю.
5. Якщо два рядки (стовпця) переставити місцями, то дістанемо визначник супротивного знаку.
6. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на число $k \neq 0$, то величина визначника зміниться у k разів.
7. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на одне й те саме число та

додати до відповідних елементів іншого рядка (стовпця), то величина визначника не зміниться.

8. Якщо всі елементи i-того рядка (стовпця) визначника представити у вигляді суми двох додатків $a_i + b_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників, у яких всі рядки (стовпці), крім i-того, такі самі, як у початковому визначнику, а i-тий рядок (стовпець) одного з визначників складається з елементів a_i, а другого – з елементів b_i .

Наша задача – навчитися обчислювати визначники, тобто «знаходити число». Правило обчислення визначників базується на таких поняттях як мінор та алгебраїчне доповнення.

Визначення 1.3. ***Мінором*** M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i –того рядка і j-того стовпця.

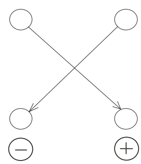
Визначення 1.4. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для визначників другого та третього порядків існують прості та легкі для запам'ятовування схеми обчислення. Познайомимося з ними.

Визначник другого порядку обчислюється так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми:



та за правилом «добуток множників, що розташовані на головній діагоналі береться з тим же знаком, а добуток множників, що розташовані на бічній діагоналі – з протилежним».

Приклад 1.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$.

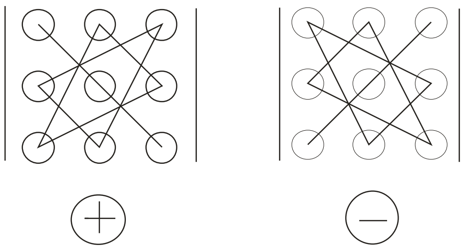
Розв'язання: $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 4 - 5\cdot 7 = -12 - 35 = -47$.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом Саррюса (правилом трикутників):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми:



та за правилом «з тим же знаком беремо добуток елементів, що розташовані на головній діагоналі та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна з сторін трикутника була паралельна головній діагоналі, яку утворюють елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}, та всі елементи були на різних строках та в різних стовпцях; з протилежним знаком беремо добуток елементів, що розташовані на бічній діагоналі, яку утворюють елементи a_{13}, a_{22}, a_{31}, та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна з сторін трикутника була паралельна бічній діагоналі та всі елементи були на різних строках та в різних стовпцях».

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 \cdot 1 -$$

$$-(-3) \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 1 =$$

$$= 20 + 0 - 12 - 12 - 20 - 0 = -24.$$

Для обчислення визначників більш високих порядків таких зручних та легких для запам'ятовування схем не існує. Нам на допомогу прийде загальне правило обчислення визначника n-го порядку.

Визначення 1.5. Визначник n-го порядку дорівнює сумі n добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}. \qquad (1.2)$$

Подане правило має назву: розкриття визначника за елементами рядка (стовпця).

Приклад 1.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, розкриваючи його

а) за елементами 4-го рядка; б) за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання:

а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 4-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 4\\ -3 & 5 & 1\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 4 & 2 & 4\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot(0+4+0-0+2-60)+$$

$$+2\cdot(0+12+0-0+4-40)+4\cdot(4-36+0-0-12+8)$$

$$+2\cdot(20+0+4-6-0-60)=-2\cdot(-54)+2\cdot(-24)+$$

$$+4\cdot(-36)+2\cdot(-42)=108-48-144-84=-168.$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 0 & 4\\ -3 & -1 & 5 & 1\\ 2 & 2 & -4 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2 & 4\\ -3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+5\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 4 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 4 & 2 & 4\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-8+4-24+8-8+12)+$$

$$+5\cdot(8+24+0-0-24-16)+$$

$$+4\cdot(4-36+0-0-12+8)=$$

$$=-1\cdot(-16)+5\cdot(-8)+4\cdot(-36)=16-40-144=-168.$$

З розв’язання цього приклада можемо зробити декілька висновків. По-перше, яким би способом ми не обчислювали визначник, відповідь буде незмінна. По-друге, обчислюючи визначник четвертого порядку, розкриваючи його за елементами рядка (стовпця), ми вимушені обчислювати чотири визначника третього порядку. По-третє, розкриваючи визначник за елементами третього стовпця, ми замість чотирьох визначників обчислили три, тому що один з елементів стовпця – нульовий. Отже, чим більше нулів у рядку (стовпці), тим менше обчислювань ми вимушені робити. Але не завжди за умовою ми маємо нульові елементи в визначниках.

Згадаємо сьому властивість визначників. Якщо ми зможемо підібрати множники таким чином, щоб додаючи помножені елементи одного рядка (стовпця) до елементів іншого рядка (стовпця), отримати нульові елементи (крім одного), то обчислення визначника n-го порядку зведеться к обчисленню добутку одного елемента на визначник $(n-1)$-го порядку з урахуванням знаку. Скористаємось сьомою властивістю визначників для їх обчислення, розкладаючи останній по елементах рядка (стовпця) з попереднім отриманням нулів.

До розглядання прикладу, зробимо зауваження: 1)якщо отримуємо нулі в рядку, працюємо з стовпцями, якщо отримуємо нулі в стовпці, працюємо з рядками; 2) щоб уникнути необхідності працювати з дрібними множниками, будемо обирати елементи 1 або -1 (якщо є така можливість).

Приклад 1.4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, попередньо отримуючи нулі та розкриваючи його: а) за елементами 3-го рядка; б) за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання:

а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го рядка, попередньо отримав нулі. Оберемо елемент 1. Щоб отримати в 3-му рядку всі інші елементи нульовими, 4-тий стовпець (в якому знаходиться обрана 1) помножимо на 3 та додамо до 1-го стовпця, помножимо на 1 та додамо до 2-го стовпця, помножимо на -5 та додамо до 3-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 16 & 6 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -14 & 2 \end{vmatrix} =$$

3
1
-5

$$= 1 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 16 & 6 & -20 \\ 8 & 4 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-168 - 480 - 64 + 48 + 160 + 672) = -168.$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця, попередньо отримав нулі. Оберемо елемент -1. Щоб отримати в 3-му стовпці всі інші елементи нульовими, 1-ший рядок (в якому знаходиться обрана -1) помножимо на 5 та додамо до 3-го рядка, помножимо на -4 та додамо до 4-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \quad 5 \ -4 \quad = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 7 & 14 & 0 & 1 \\ -6 & -10 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 7 & 14 & 1 \\ -6 & -10 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(112 - 12 - 280 + 336 + 40 - 28) = -168.$$

1.2. МАТРИЦІ
1.2.1. Основні визначення

Визначення 1.6. ***Матрицею*** $A = \|a_{ij}\|$ називається прямокутна таблиця чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Визначення 1.7. Числа a_{ij} називаються ***елементами матриці***, де i - номер рядка ($i = \overline{1,m}$), а j – номер стовпця ($j = \overline{1,n}$).

Визначення 1.8. Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною*** матрицею.

Визначення 1.9. Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої, дорівнюють *1*, а всі інші – *0*, називається ***одиничною***, та позначається як

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Визначення 1.10. Дві матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони однакового розміру та відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} цих матриць рівні.

1.2.2. Операції над матрицями

<u>Додавання (різниця) матриць.</u> Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.

Визначення 1.11. ***Сумою (різницею)*** двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того же розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B:

$$A + B = C, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \tag{1.5}$$

$$A - B = D, \qquad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \tag{1.6}$$

Приклад 1.5. Знайти суму та різницю матриць $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 + (-2) & -5 + 2 & 2 + (-1) \\ 3 + 3 & 1 + 0 & -7 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 4 - (-2) & -5 - 2 & 2 - (-1) \\ 3 - 3 & 1 - 0 & -7 - 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

<u>Множення матриць на число.</u>

Визначення 1.12. Добутком матриці A на число λ називається матриця B, кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A:

$$B = \lambda \cdot A, \qquad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Приклад 1.6. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 7$.

Розв'язання:

$$B = 7 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 9 \\ 7 \cdot 0 & 7 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 42 \\ 14 & 63 \\ 0 & -28 \end{pmatrix}.$$

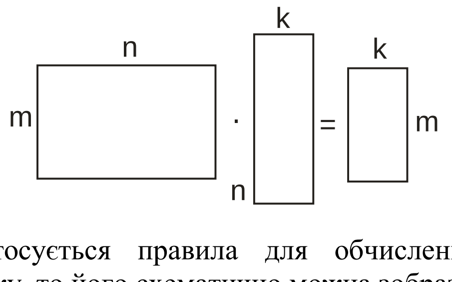
Множення матриць. Множити можна матриці лише в тому випадку, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. В добутку отримаємо матрицю, у якої стільки рядків, скільки у першої матриці, і стільки стовпців, скільки у другої.

Визначення 1.13. Добутком матриць $A\ [m \times n]$ і $B\ [n \times k]$ називається матриця $C\ [m \times k]$, елементи якої обчислюються за правилом

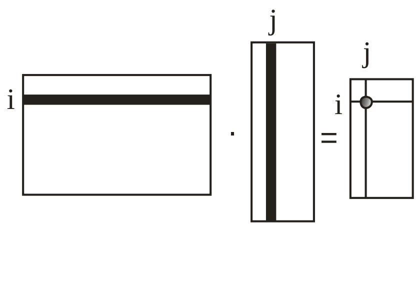
$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj} \qquad (1.7)$$

$\left(\text{де } i = \overline{1,m}; j = \overline{1,k}\right)$.

Схематично розмір отриманої матриці можна зобразити наступним чином:



Що стосується правила для обчислення елементів матриці-добутку, то його схематично можна зобразити так:



Щоб отримати елемент c_{ij}, необхідно скласти суму добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B. При виконанні цього завдання радимо користуватися олівцем та гумкою, закреслюючи відповідні рядки першої та стовпці другої матриць.

Зауваження: В загальному випадку операція множення матриць не комутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$, навіть коли це можливо.

Приклад 1.7. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти добуток матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо.

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-7) \cdot (-4) & 2 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-7) \cdot 5 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) & 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 28 & 0 - 7 & -4 - 35 \\ 3 - 20 & 0 + 5 & -2 + 25 \\ 12 - 24 & 0 + 6 & -8 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -7 & -39 \\ -17 & 5 & 23 \\ -12 & 6 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-7) + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & (-4) \cdot (-7) + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 0 - 8 & -21 + 0 - 12 \\ -8 + 1 + 20 & 28 + 5 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -33 \\ 13 & 63 \end{pmatrix}.$$

В розглянутому прикладі можливі були операції множення $A \cdot B$ і $B \cdot A$. В результаті ми отримали матриці не тільки з різними елементами, але й різного розміру: у першому випадку ми отримали матрицю розміром 3×3, а в другому - 2×2.

Зауваження: Для квадратних матриць однакового порядку операція множення матриць можлива завжди.

Якщо A і B - дві квадратні матриці n-го порядку, то їх добуток $A \cdot B$ – матриця n-го порядку. Виникає питання, а чи пов'язані між собою визначники цих матриць?

Теорема 1.1. Визначник добутку двох квадратних матриць n-го порядку дорівнює добутку визначників матриць-множників.

Доведення цієї теореми виходить за рамки розглядає мого курсу. Перевіримо її результати на прикладі.

Приклад 1.8. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ і

$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$. Знайти визначники матриць A, B і $A \cdot B$.

Розв'язання:

$A \cdot B =$

$$= \begin{pmatrix} 5+3+32 & 1-1+8 & 2+0-48 \\ 10+0+20 & 2+0+5 & 4+0-30 \\ 15+3+16 & 3-1+4 & 6+0-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 8 & -46 \\ 30 & 7 & -26 \\ 34 & 6 & -18 \end{pmatrix};$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 15 - 16 - 0 + 5 + 8 = -18;$$

$$detB = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 0 - 6 - 8 - 0 - 18 = -62;$$

$$det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 40 & 8 & -46 \\ 30 & 7 & -26 \\ 34 & 6 & -18 \end{vmatrix} = -5040 - 7072 - 8280 +$$

$$+10948 + 4320 + 6240 = 1116;$$

$$detA \cdot detB = -18 \cdot (-62) = 1116.$$

Як бачимо, $detA \cdot detB = det(A \cdot B)$.

Транспонування матриць. Нехай A - матриця розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначення 1.14. Матриця, що утворюється з матриці A заміною рядків стовпцями (або навпаки), називається ***транспонованою*** матрицею відносно матриці A і позначається A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Приклад 1.9. Знайти транспоновану матрицю A^T відносно матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -7 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Обернена матриця</u>.

Визначення 1.15. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Квадратна матриця A^{-1} (n-го порядку) називається ***оберненою*** до A, якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Визначення 1.16. Квадратна матриця A n-го порядку називається ***невиродженою***, якщо її визначник $detA$ відрізняється від нуля, в протилежному випадку матриця називається ***виродженою***.

<u>Теорема 1.2.</u> Будь-яка невироджена матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1}.

Обернену матрицю будемо знаходити за схемою:

1) обчислюємо визначник матриці $detA$;
2) знаходимо транспоновану матрицю A^T;
3) обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці;
4) записуємо обернену матрицю за правилом:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

5) виконуємо перевірку, обчисливши $A \cdot A^{-1} = E$ або $A^{-1} \cdot A = E$.

Приклад 1.10. Знайти матрицю, обернену до

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$detA = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 12 - 60 - 0 + 12 = -24;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6;$$

$$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 20) = 24;$$

$$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(-12 - 12) = 24;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - 0) = 3;$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24+12-60 & 0+12-12 & -48+24+24 \\ -72-48+120 & 0-48+24 & 144-96-48 \\ 24+6-30 & 0+6-6 & -48+12+12 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, перевірка показала, що обернена матриця знайдена вірно.

Відповідь: $A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

<u>Ранг матриці. Елементарні перетворення</u>.

Нехай дано прямокутну матрицю A розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(В окремому випадку можлива рівність $m = n$, тобто матриця A може бути квадратною).

Нехай k - довільне натуральне число, що не перевищує m і n. Оберемо в A довільним способом k рядків з номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ та k стовбців з номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. З елементів матриці A, що розташовані на перетині обраних k рядків і k стовпців, утворимо визначник:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник називається мінором k –го порядку матриці .

Визначення 1.17. ***Рангом матриці*** A $(rangA)$ називається таке ціле число r, що серед мінорів r-го порядку матриці A є хоча б один такий, що відрізняється від нуля, а всі мінори $(r+1)$-го порядку (якщо їх можна скласти) дорівнюють нулю.

Метод знаходження рангу матриці за визначенням 1.17 називається ***«методом відокреслених мінорів»***. Розберемо цей метод на прикладі.

Приклад 1.11. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

На перетині, наприклад, першого рядка і першого стовпця розташований елемент -5 $\neq 0$. Отже ранг матриці не менший від одиниці.

З елементів, що розташовані, наприклад, на перетині перших двох рядків і перших двох стовпців, утворимо мінор (визначник) другого порядку:

$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 0 = -15 \neq 0$, Отже, ранг матриці не менший від двох.

З елементів, що розташовані, наприклад, на перетині трьох рядків і перших трьох стовпців, утворимо мінор (визначник) третього порядку:

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -120 + 4 + 0 - 24 - 0 + 20 = -120 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці не менший від трьох. Визначник четвертого порядку скласти неможливо, тому що матриця A має 3 рядки та чотири стовпці. Тому ранг матриці дорівнює трьом.

Відповідь: $rangA = 3$.

Визначення 1.18. Під ***елементарними перетвореннями*** матриці маємо наступні операції:

1) множення будь-якого рядка (стовпця) матриці на число, що відрізняється від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка (стовпця) матриці відповідних елементів другого рядка (стовпця), що помножені на одне й теж саме число;
3) заміна місцями двох рядків (стовпців).

Зауваження. Елементарні перетворення обернені, тобто якщо матриця B отримана з матриці A за допомогою деякого елементарного перетворення, то і матриця A може бути отримана з матриці B за допомогою деякого елементарного перетворення(що називається оберненим).

<u>*Теорема 1.3.*</u> Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, тобто якщо $A \to B$ то $rangA = rangB$.

Цією теоремою можна скористатися для обчислення рангу матриці. Для знаходження рангу матриці розміру $m \times n$ необхідно за допомогою елементарних перетворень звести початкову матрицю до вигляду, в якому всі елементи дорівнюють одиниці або нулю. Ранг матриці буде дорівнювати числу відмінних від нуля елементів перетвореної матриці.

Цей метод знаходження рангу матриці називається ***«методом елементарних перетворень».*** Розберемо цей метод на прикладі.

Приклад 1.12. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Другий стовпець перемістили на місце першого, а третій стовпець поділили на 2. Перший рядок помножено на (-3) і додано до другого рядка. Перший рядок помножено на (-2) і додано до третього рядка.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 15 & -5 & 18 \\ 0 & 12 & 0 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

Перший стовпець має один елемент, що дорівнює 1, а інші елементи дорівнюють нулю. Цей стовпець послідовно помножимо на 5, -2 та 7 і додамо до другого, третього та четвертого стовпців. Отримаємо у першому рядку одиницю, а решту нулі.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -5 & 18 \\ 0 & 12 & 0 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

Третій стовпець поділимо на -5 і одержимо в ньому 2 нулі і одну одиницю. Третій стовпець помножимо на -15 і -18 та додамо до другого і третього стовпців. Отримаємо у другому рядку три нульових елементи і одну одиницю.

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 1 & 18\\ 0 & 12 & 0 & 15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 15\end{pmatrix}\sim$$

Другий стовпець поділимо на 12, а четвертий стовпець поділимо на 15. Отримаємо два однакових стовпця. Від четвертого стовпця віднімемо другий і отримаємо нульовий стовпець

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже маємо три відмінних від нуля елементи перетвореної матриці, тому ранг матриці A дорівнює трьом.

Відповідь: $rangA = 3$.

1.2.3. Застосування матриць для розв’язання задач з економіки

На практиці для аналізу, систематизації, планування роботи фірми, підприємства, галузі народного господарства часто користуються таблицями – матрицями. З їх допомогою і ми спробуємо навчитися розв’язувати нескладні задачи з економіки, а саме: обчислювати обсяги продукції декількох видів за визначений часовий інтервал; приріст обсягів виробництв; вартість виробленої продукції; виручку по підприємствам (регіонам, галузям) і т.п. Наведемо приклади розв’язання таких типових задач.

Задача 1. Нехай в деякій галузі n підприємств випускають m видів продукції. Матриця $A[n \times m]$ задає обсяги продукції на кожному підприємстві в першому кварталі, а матриця $B[n \times m]$ - в другому. Тобто елементи цих матриць $(a_{ij},\ b_{ij})$ – це обсяги на i-тому заводі продукції j-го виду в першому і другому кварталах відповідно. Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо λ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

Розв'язання:

а) $C = A + B$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;

б) $D = B - A$, де $d_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$

Зауважимо, що додатні d_{ij} свідчать про те, що на даному підприємстві i обсяг виробництва j збільшився, а від'ємні - що зменшився, нульові – не змінився;

в) $K = \lambda \cdot A$, де $k_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Приклад 1.13. Задачу 1 розв'яжемо, коли

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 14 & 6 \\ 9 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 12 & 7 \\ 10 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \text{ і } \lambda = 8.$$

Розв'язання: Тут $n = 3, m = 4$.

а) $C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 16 & 13 & 11 \\ 2 & 4 & 26 & 13 \\ 19 & 4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$;

б) $D = B - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $K = 8 \cdot A = \begin{pmatrix} 24 & 64 & 56 & 40 \\ 8 & 8 & 112 & 48 \\ 72 & 16 & 8 & 40 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Підприємство виробляє n типів продукції, обсяги виробництва задаються матрицею $A[1 \times n]$. Вартість реалізації одиниці i-го типа продукції в j-тому регіоні задана матрицею $B[n \times k]$, де k - число регіонів, в яких реалізується продукція. Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

Розв'язання: Матриця виручки по регіонах знаходиться за формулою

$$C = A \cdot B. \tag{1.10}$$

Зауважимо, що $c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{jk}$ - виручка підприємства в j-тому регіоні.

Приклад 1.14. Підприємство виробляє чотири типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в п'яти регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = (420 \quad 350 \quad 780 \quad 205), \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

Розв'язання: Знайдемо матрицю виручки по регіонах:

$$C = A \cdot B = (420 \quad 350 \quad 780 \quad 205) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= (7495 \quad 4605 \quad 6210 \quad 10770 \quad 10670).$$

Задача 3. Підприємство виробляє m типів продукції, використовуючи n видів ресурсів. Норми затрат ресурсу i–го товару на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею $A[n \times m]$. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу x_{ij}, яка задана матрицею $X[m \times 1]$. Нехай вказана вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці $P[1 \times n]$. Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період;

Розв'язання:

а) матриця повних затрат знаходиться за формулою

$$S = A \cdot X; \tag{1.11}$$

б) повна вартість усіх витрачених ресурсів знаходиться за формулою

$$C = P \cdot S \quad \text{або} \quad C = P \cdot A \cdot X. \tag{1.12}$$

Приклад 1.15. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи п'ять видів ресурсів. Норми затрат ресурсу i–го товару на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею $X = \begin{pmatrix} 275 \\ 148 \\ 356 \end{pmatrix}$, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці

$P = (25 \quad 40 \quad 76 \quad 100 \quad 95)$. Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період;

Розв'язання:

а) $S = A \cdot X = \begin{pmatrix} 1100 + 888 + 2848 \\ 825 + 444 + 2492 \\ 1375 + 148 + 0 \\ 550 + 1332 + 2492 \\ 1650 + 1184 + 1424 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4836 \\ 3761 \\ 1523 \\ 4374 \\ 4258 \end{pmatrix}$,

таким чином, за заданий період буде використано 4836 одиниць ресурсів першого виду, 3761 – другого виду і т.д.;

б) $C = P \cdot S = (25 \quad 40 \quad 76 \quad 100 \quad 95) \cdot \begin{pmatrix} 4836 \\ 3761 \\ 1523 \\ 4374 \\ 4258 \end{pmatrix} =$

$= 120900 + 150440 + 115748 + 437400 + 404510 = 1228998$

(грошових одиниць).

1.3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1.3.1. Основні визначення

Визначення 1.19. ***Система*** m ***лінійних рівнянь*** з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.13}$$

де числа a_{ij} називаються коефіцієнтами системи; b_i - вільними членами; $x_1, x_2, \dots, x_n$ - невідомими.

Визначення 1.20. Сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називається ***розв'язком системи*** (1.13), якщо заміна невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ відповідно, кожне рівняння системи перетворює в тотожність.

Визначення 1.21. Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язка.

Визначення 1.22. Сумісна система рівнянь називається ***визначеною***, якщо має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо розв'язків більш, ніж один.

Визначення 1.23. Система рівнянь (1.13) називається ***однорідною***, якщо всі числа b_i дорівнюють нулю; і ***неоднорідною***, якщо хоча б одне з b_i відмінно від нуля.

Стосовно кожної системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна поставити наступні запитання:

1) чи сумісна система лінійних рівнянь?
2) у випадку сумісності, як визначити кількість розв'язків?
3) як розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь?

Відповідь на всі запропоновані питання нам надасть теорія лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.3.2. Теорема Крамера

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.14)$$

Визначення 1.24. Визначник, що складений з коефіцієнтів при невідомих a_{ij} системи (1.14), називається ***визначником системи*** Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.15)$$

Визначення 1.25. Δ_k - це визначник, що отримується з визначника системи Δ заміною k-го стовпця вільними членами системи:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.15)$$

Теорема Крамера. Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відрізняється від нуля, то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (1.16)$$

Формули (1.16) мають назву ***формул Крамера***.

Зауваження. Недоцільно використання формул Крамера у системах з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення $n+1$ визначника n порядку. Тому формули Крамера, частіше за все, використовують для розв'язання систем 2-4 порядків.

Приклад 1.13. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -10. \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 18 + 4 + 15 + 6 + 16 = 39;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -1 \\ -10 & 5 & 2 \\ 11 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 90 + 66 - 40 + 55 - 72 - 60 = 39;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -9 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 3 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 54 - 11 - 30 - 18 - 44 = -117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -10 \\ 3 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 110 - 90 + 36 + 135 - 33 - 80 = 78;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-117}{39} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2.$$

Перевірка. Підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 2 = -9$. Ми отримали тотожність.

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$.

1.3.3. Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса

Нехай дано систему m лінійних рівнянь з n невідомими (1.13). Розглянемо матрицю A системи (1.13) та її розширену матрицю $\tilde{A}$ (матрицю, що складається з елементів матриці A та стовпця вільних членів B):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right). \tag{1.18}$$

Метод Гауса розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь складається в тому, що за допомогою елементарних перетворень її зводять до вигляду, коли матриця $\tilde{A}$ системи стає трапецієвидною. Після того (як матриця $\tilde{A}$ стала трапецієвидною) з легкістю можна відповісти на запитання о сумісності системи та о кількості розв’язків. Зводити матрицю системи до трапецієвидної форми будемо наступним чином. Спочатку в усіх рівняннях системи, крім першого вилучимо невідому x_1; потім в усіх рівняннях, крім першого і другого – невідому x_2 і так далі.

Так як кожному елементарному перетворенню системи відповідає елементарне перетворення розширеної матриці системи (і навпаки), то замість системи (для скорочення запису) будемо працювати з розширеною матрицею цієї системи, виконуючи перетворення лише над рядками.

Зауваження. Метод Гауса використовують для розв’язання систем з будь-якою кількістю невідомих, тому що зі зростанням n кількість обчислень зростає незначно.

Для ілюстрації метода Гауса розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.13. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Розв’язання: Поставимо у відповідність системі розширену матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-3)(-2)(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ :(-5) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 13 \quad 3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ :(-9) \\ :4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17/12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 3 \\ \cdot 12/17 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $x_4 = 0$.

Третій рядок розширеної матриці прочитаємо як $3x_3 + 2x_4 = 3$. Підставимо знайдене значення x_4, отримаємо: $3x_3 + 2 \cdot 0 = 3; \quad x_3 = 1.$

З другого рядка маємо $x_2 - x_3 = -2;$
$x_2 - 1 = -2; \quad x_2 = -1.$

І, нарешті, з першого рядка розширеної матриці $x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -4$, з урахуванням знайдених $x_2, x_3\ x_4$: $x_1 + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 0 = -4$, маємо $x_1 = 2$. Після перевірки можемо записати відповідь.

Відповідь: $x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0.$

Приклад 1.14. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -3 \\ 4x_1 + 13x_2 - 22x_3 + 11x_4 = 7 \\ -2x_1 - 7x_2 + 12x_3 - 9x_4 = -3 \end{cases}.$$

Розв'язання: Поставимо у відповідність системі розширену матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 6 & -3 \\ 4 & 13 & -22 & 11 & 7 \\ -2 & -7 & 12 & -9 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1\ (-4)\ 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)\ 1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже ми отримали систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$

Останні два рівняння перетворилися в рівняння вигляду:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.$$

Ці рівняння задовольняються при будь-яких значеннях невідомих, тому їх можна відкинути. Щоб задовольнити другому рівнянню, ми можемо для x_3 і x_4 обрати будь-які значення α і β, тоді значення для x_2 визначиться однозначно: $x_2 - 2 \cdot \alpha + 7 \cdot \beta = -1; \quad x_2 = -1 + 2\alpha - 7\beta.$

З першого рівняння $x_1 + 3 \cdot (-1 + 2\alpha - 7\beta) - 5\alpha + \beta = 2$ також однозначно визначимо $x_1 = 5 - \propto + 20\beta$. Остання система рівносильна початковій, тому формули

$$x_1 = 5 - \propto + 20\beta;$$
$$x_2 = -1 + 2\alpha - 7\beta;$$
$$x_3 = \alpha;$$
$$x_4 = \beta.$$

при вільних α і β дають нам всі розв'язки системи. Як бачимо, їх нескінчена множина.

Приклад 1.15. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 \qquad + 7x_4 = 0 \\ -3x_1 + 13x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -6 \\ 5x_1 + 11x_2 + 11x_3 + 8x_4 = 11 \end{cases}.$$

Розв'язання: Поставимо у відповідність системі розширену матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 13 & -5 & -8 & -6 \\ 5 & 11 & 11 & 8 & 11 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} (-2)\ 3(-5) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) (-1) \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

Отже, задана за умовою система рівносильна наступній:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2 \\ 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ 0 = 9 \end{cases}.$$

Ця система несумісна, тому що її останнє рівняння

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 9$$

не може бути задоволене ніякими значеннями невідомих.

Відповідь: система несумісна.

1.3.4. Матричний метод

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (1.14). Поставимо у відповідність системі (1.14) матричне рівняння

$$A \cdot X = B, \tag{1.19}$$

де A - матриця коефіцієнтів при невідомих, X - стовпець невідомих, B - стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що визначник A (визначник матриці A) системи (1.14) відрізняється від нуля. За теоремою Крамера така система має єдиний розв'язок. З іншого боку, для невиродженої матриці A існує обернена матриця A^{-1}.

Помножимо обидві частини рівності (1.19) зліва на A^{-1}. Така операція можлива, тому що A^{-1} - квадратна матриця n-го порядку, а матриці-стовпці X і B мають розмір $n \times 1$. Отримаємо

$$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = EX = X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, щоб розв'язати систему (1.13), представлену у вигляді (1.19), необхідно обчислити

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{1.20}$$

Зауваження. Як і у випадку використання формул Крамера, матричний метод не застосовують при розв'язанні систем з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення одного визначника n порядку (визначник матриці A) та n визначників $(n-1)$-го порядку (алгебраїчні доповнення).

Приклад 1.16. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -11 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання: Запишемо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 20 - 2 - 1 - 15 - 16 = -20 \neq 0,$$

тобто матриця невироджена і обернена до неї існує. Транспонуємо матрицю:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 5 = -7;$$

$$A_{12}^T = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(8 + 1) = -9;$$

$$A_{13}^T = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19;$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 5) = -1;$$

$$A_{22}^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7;$$

$$A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 2) = 17;$$

$$A_{31}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$$

$$A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1;$$

$$A_{33}^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

Множник $(-1)^{i+j}$ тут враховано.

Отже обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Скористаємося формулою (1.20):

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 77 - 117 + 0 \\ 11 - 91 + 0 \\ 33 - 13 + 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -1$.

1.3.5. Умова сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

Питання сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.13) повністю розв'язується наступною теоремою.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.13) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A дорівнював рангу її розширеної матриці $\tilde{A}$, тобто $rangA = rang\tilde{A}$.

З теореми Кронекера-Капеллі (у випадку сумісності системи) легко отримати відповідь на питання о кількості розв'язків системи.

Теорема о кількості розв'язків системи. Нехай для системи m лінійних рівнянь з n невідомими (1.13) виконується умова сумісності, тобто ранг матриці A дорівнює рангу її розширеної матриці $\tilde{A}$. Тоді, якщо ранг матриці дорівнює кількості невідомих $(r = n)$, то система є визначеною і має єдиний розв'язок. Якщо ранг матриці менше кількості невідомих $(r < n)$, тоді система невизначена і має нескінчену кількість розв'язків, а саме: деяким $(n - r)$ невідомим, які будемо називати ***базовими*** можна надати довільні значення, тоді r невідомі, що залишились (їх будемо називати ***вільними***), визначаються вже однозначно через базові.

1.3.6. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано однорідну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \qquad (1.21)$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що завжди має наступний розв'язок:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Цей розв'язок називається *нульовим* (або *тривіальним*). Будь-який інший розв'язок (якщо він існує), в якому хоча б один невідомий відрізнявся від нуля, називається *ненульовим* (або *нетривіальним*).

<u>*Теорема 1.4*</u>. Для того, щоб однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.21) мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи був менше числа невідомих ($r < n$).

У випадку, коли число рівнянь дорівнює числу невідомих ($m = n$), умова ($r < n$) відповідає тому, що визначник системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$).

Приклад 1.17. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -24 + 12 + 70 + 45 - 8 - 56 = 39 \neq 0.$$

Ранг матриці системи дорівнює 3 ($rangA = 3$) і співпадає з числом невідомих. За умовою теореми 1.4 така система має лише тривіальний розв'язок. Отже,

Відповідь: $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ x_3 = 0.$

Приклад 1.18. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання: Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 6 - 18 + 1 + 4 = 0.$$

Ранг матриці менший 3, тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв'язок. Знайдемо його, виключивши одне з рівнянь, наприклад третє:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Нехай $x_3 = k$, де k - довільне число. Виразимо x_1 і x_2 через $x_3 = k$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3k \\ x_1 + 2x_2 = k \end{cases}.$$

Розв'яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3k & -1 \\ k & 2 \end{vmatrix} = -6k + 5 = -5k;$$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3k \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2k + 3k = 5k.$

Отже маємо: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5k}{5} = -k; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5k}{5} = k.$

Відповідь: $x_1 = -k;\ x_2 = k;\ x_3 = k;\ k \in R.$

1.3.7. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

У попередньому розділі ми познайомилися з методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Знання цих методів та навички в їх використанні знадобляться нам у розв'язанні прикладних економічних задач. Познайомимося з основними визначеннями та формулами.

Визначення 1.26. Рівняння вигляду $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$ $(i = 1,2,\dots n)$ називаються ***співвідношеннями балансу***, де x_i - об'єми валового продукту i-тої галузі для невиробничого споживання, x_{ij} - об'єм продукції i -тої галузі, що споживаються в процесі виробництва j-тою галуззю $(i = 1,2,\dots n)$.

Співвідношення балансу можуть бути записані:

а) у вигляді $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad (i = 1,2,\dots n)$ (1.22)

де

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i,j = 1,2,\dots,n) \tag{1.23}$$

- ***коефіцієнти прямих витрат***, які вказують на витрати продукції i-тої галузі на виробництво одиниці продукції j-тої галузі;

б) у матричному вигляді

$$X = AX + Y \tag{1.24}$$

або $$(E - A)X = Y \qquad (1.25)$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, (1.26)

X - вектор валового випуску, Y - вектор кінцевого продукту, A - матриця прямих витрат.

Головна задача міжгалузевого балансу складається у знаходженні такого вектора валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Вектор X валового випуску знаходиться за формулою:

$$X = (E - A)^{-1}Y = SY \qquad (1.27)$$

де матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається ***матрицею повних витрат***, кожен елемент s_{ij} якої показує величину валового випуску продукції i-тої галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-тої галузі $y_j = 1$ $(j = 1,2,\dots,n)$.

Зауваження. Матриця $A \geq 0$ називається ***продуктивною***, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (1.25).

Матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1,2,\dots,n$ та $\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ існує номер j такий, що $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Визначення 1.27. ***Чистою продукцією галузі*** називається різниця між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Скористаємося наведеними визначеннями для розв'язання задач.

Приклад 1.19. В таблиці 1.1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.1

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,4	0,35	400
	Галузь 2	0,2	0,15	300

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %.

Розв'язання:

1) запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}35 \\ 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця продуктивна, тому що всі її елементи додатні та сума елементів в кожному рядку і в кожному стовпці менше одиниці.

Щоб знайти матрицю повних витрат, знайдемо матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}35 \\ 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}35 \\ -0{,}2 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

Звідси матриця повних витрат $S = (E - A)^{-1}$ знаходиться за добре відомою нам схемою знаходження оберненої матриці:

$\det(E-A) = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{vmatrix} = 0,51 - 0,07 = 0,44;$

$(E-A)^T = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,35 & 0,85 \end{pmatrix};$

$A_{11}^T = 0,85; \quad A_{12}^T = 0,35; \quad A_{21}^T = 0,2; \quad A_{22}^T = 0,6;$

$S = (E-A)^{-1} = \frac{1}{0,44}\begin{pmatrix} 0,85 & 0,35 \\ 0,25 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix}.$

Знайдемо вектор валового продукту X за формулою (1.27):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 772 + 240 \\ 228 + 408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1012 \\ 636 \end{pmatrix}$$

Перший рядок матриці X відповідає галузі 1, а другий – галузі 2.

Міжгалузеві поставки x_{ij} знайдемо за формулою (1.23):

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$$

$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,4 \cdot 1012 = 404,8;$

$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,35 \cdot 636 = 222,6;$

$x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,2 \cdot 1012 = 202,4;$

$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,15 \cdot 636 = 95,4.$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Отже, витрати продукції всіх галузей на виробництво:

- першої галузі

$$x_{11} + x_{21} = 404,8 + 202,4 = 607,2;$$

- другої галузі

$$x_{12} + x_{22} = 222{,}6 + 95{,}4 = 318{,}0.$$

Остаточно маємо чисту продукцію

- першої галузі: $1012 - 607{,}2 = 404{,}8$;
- другої галузі: $636 - 318 = 318$.

Всі отримані результати зведені в таблиці 1.2:

Таблиця 1.2

Галузь		Споживання		Кінцева продукція	Валова продукція
		Галузь 1	Галузь 2		
Виробництво	Галузь1	404,8	222,6	400	1012
	Галузь2	202,4	95,4	300	636
Чиста продукція		404,8	318		
Валова продукція		1012	636		

2) знайдемо вектор кінцевого споживання Y, з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %:

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \cdot 1{,}1 \\ 300 \cdot 1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 390 \end{pmatrix}.$$

Останнє дає можливість знайти вектор валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Скористаємося формулою (1.27):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}93 & 0{,}80 \\ 0{,}57 & 1{,}36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 440 \\ 390 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 849{,}2 + 312 \\ 250{,}8 + 530{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1161{,}2 \\ 781{,}2 \end{pmatrix}$$

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

2.1. МЕТОД КООРДИНАТ

2.1.1. Декартова система координат на площині

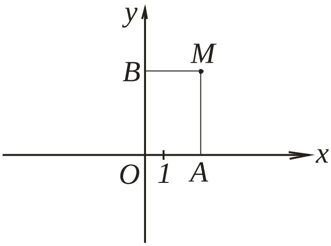


Рис. 2.1.

Нехай на площині проведено дві взаємно перпендикулярні прямі Ox, Oy (рис. 2.1).

Визначення 2.1. Система координат, що утворена перетином двох взаємно перпендікулярних прямих, називається ***прямокутною*** (або ***декартовою***) системою координат. Вісь Ox називається віссю абсцис, вісь Oy - віссю ординат. Точка O перетину координатних осей називається ***початком координат***.

Система координат вважається заданою, якщо заданий початок координат, напрям координатних осей та масштаб (одиничний відрізок).

Нехай M - довільна точка на площині (рис. 2.1). Проведемо із неї перпендикуляри MA і MB на координатні вісі. Нас цікавлять довжини OA і OB, які беруться з певними знаками.

Правило:

1) якщо точка A розташована праворуч від початку координат, то довжині OA приписують знак «+», якщо ліворуч – « - »;
2) якщо точка B розташована вище від початку координат, то довжині OB приписують знак «+», якщо нижче – « - ».
3) Таким чином точка M має координати $x = OA,\ y = OB$ (одиниць довжини).

Перший принцип відповідності. Будь-якій точці на площині відповідає два числа – її координати. І навпаки, будь-якій парі чисел відповідає певна точка на площині, яка має ці числа своїми координатами.

2.1.2. Довжина відрізка. Відстань між двома точками

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 2.2). Опустимо перпендикуляри з точок M_1 і M_2 на координатні вісі.

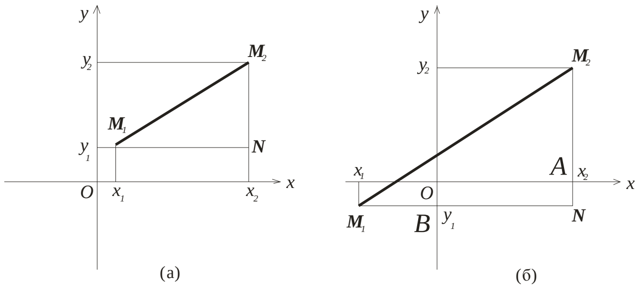


Рис. 2.2.

Точку перетину перпендикулярів позначимо як N, вона має координати (x_2, y_1). Ми отримали прямокутний трикутник M_1NM_2, де M_1M_2 - гіпотенуза. З теореми Піфагора маємо

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(M_1N)^2 + (M_2N)^2}.$$

На рис. 2.2,а простіше розташування точок. Тут $M_1N = x_2 - x_1$, $M_2N = y_2 - y_1$.

Отже маємо

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.1)$$

Розглянемо рис. 2.2,б. Тут $M_1N = M_1B + BN$, але $M_1B = -x_1$, $BN = x_2$, а тому $M_1N = x_2 - x_1$. Аналогічно $M_2N = M_2A + AN$, але $M_2A = y_2$, $AN = -y_1$, а тому $M_2N = y_2 - y_1$. Отже маємо $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Згідно з формулою (2.1) відстань від початку координат $O(0,0)$ до точки $M(x,y)$ обчислюємо за формулою

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.2}$$

Приклад 2.1. Дано вершини трикутника ABC: $A(-2,1), B(1,5), C(6,-4)$. Знайти периметр трикутника.

Розв'язання: Периметр трикутника обчислимо за формулою

$$P = AB + BC + CA.$$

Для цього знайдемо довжини відрізків AB, BC, CA.

$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ (од.);

$BC = \sqrt{(6-1)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$ (од.);

$CA = \sqrt{(6+2)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{64+25} = \sqrt{89}$ (од.).

Отже маємо $P = 5 + \sqrt{106} + \sqrt{89}$ (од.).

2.1.3. Поділ відрізка у даному відношенні

Нехай дано точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ та додатні числа q_1 і q_2 $\left(\lambda = \frac{q_1}{q_2}\right)$. Необхідно знайти точку $M(x,y)$, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \frac{q_1}{q_2}$, тобто

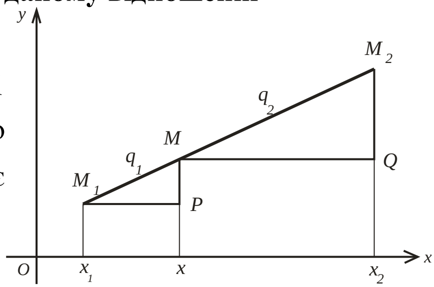


Рис. 2.3.

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{q_1}{q_2}=\lambda. \qquad (2.3)$$

Побудуємо трикутники M_1PM і MQM_2(рис.2.3). Вони подібні (за двома кутами). А тому $\frac{M_1P}{MQ}=\frac{M_1M}{MM_2}$. Але $M_1P=x-x_1,\ \ MQ=x_2-x$.

З (2.3) маємо $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{q_1}{q_2}=\lambda;\ \ x-x_1=\lambda x_2-\lambda x$,

$x+\lambda x=x_1+\lambda x_2$. Звідси

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \qquad (2.4)$$

Аналогічно знаходимо

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (2.5)$$

Приклад 2.2. Дано відрізок AB: $A(-1{,}3)$, $B(4{,}8)$. Його поділено на чотири рівні частини. Знайти координати точок ділення.

Розв'язання: На чотири частини поділяємо відрізок трьома точками. Позначимо їх як (рис. 2.4) $C,\ D,\ E$. Визначимо λ для кожної з точок як відношення кількості частин, що пройшли від початку відрізку до обраної точки, до кількості частин, що пройшли після неї. Нехай A - початок відрізку, а B - кінець. Отже $\lambda_c=\frac{1}{3},\ \lambda_D=\frac{2}{2}=1,\ \lambda_E=\frac{3}{1}=3$. Скористаємося формулами (2.4) і (2.5):

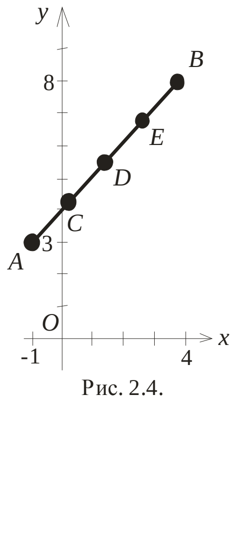


Рис. 2.4.

$$x_C=\frac{-1+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4};\qquad y_C=\frac{3+\frac{1}{3}\cdot 8}{1+\frac{1}{3}}=\frac{17}{4};$$

$$x_D=\frac{-1+4}{1+1}=\frac{3}{2};\qquad y_D=\frac{3+8}{1+1}=\frac{11}{2};$$

$x_E = \frac{-1+3\cdot4}{1+3} = \frac{11}{4}$; $y_E = \frac{3+3\cdot8}{1+3} = \frac{27}{4}$.

Відповідь: $C\left(\frac{1}{4},\frac{17}{4}\right)$, $D\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$, $E\left(\frac{11}{4},\frac{27}{4}\right)$.

Приклад 2.3. Дано трикутник ABC: $A(2,2)$, $B(-1,1)$, $C(3,7)$. Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною.

Розв'язання: Скористаємося властивістю бісектрис, а саме: бісектриса поділяє протилежну сторону трикутника у відношенні, що дорівнює відношенню довжин прилеглих сторін. Позначимо через K точку перетину бісектриси і сторони (рис. 2.5). Згідно з властивістю бісектриси маємо $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \lambda$. Обчислимо довжини AB і AC:

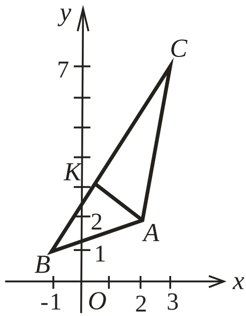


Рис. 2.5.

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26},$$

Маємо $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$. Скористуємося формулами (2.4), (2.5) і знайдемо координати точки K: $x_K = \frac{-1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\cdot3}{1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}} = \frac{-\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$;

$$y_K = \frac{1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\cdot7}{1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}+7\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $K\left(\frac{-\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{13}+7\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}\right)$.

2.1.4. Координати середини відрізка

Нехай дано точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Необхідно знайти точку $M(x, y)$, що поділяє відрізок M_1M_2 навпіл, тобто $M_1M = MM_2$.

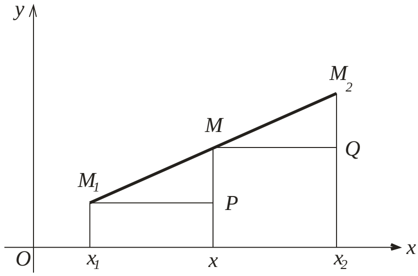


Рис. 2.6.

Побудуємо трикутники M_1PM і MQM_2 (рис.2.6). Вони рівні (за стороною та двома кутами). А тому $M_1P = MQ$.

Звідси $x - x_1 = x_2 - x$; $\quad 2x = x_1 + x_2$;

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{2.6}$$

Аналогічно маємо

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2.7}$$

Можна скористатися формулами (2.4)-(2.7) для розв’язання питання про координати центра мас однорідного трикутника. Отже, нехай дано трикутник $M_1M_2M_3$ з координатами вершин $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ (рис. 2.7). Центр мас трикутника $N(x, y)$ розташований в точці перетину медіан. За відомою властивістю, точка перетину медіан поділяє кожну медіану у відношенні $2:1$, починаючи з вершини. Розглянемо медіану M_1K. Знайдемо координати точки K як середини M_2M_3:

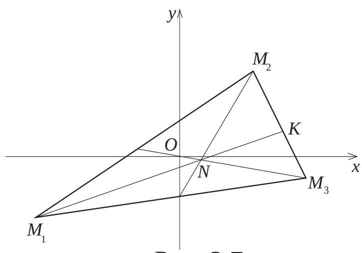


Рис. 2.7.

$x_K = \frac{x_2+x_3}{2}$; $y_K = \frac{y_2+y_3}{2}$. Точка N поділяє відрізок M_1K у відношенні $2:1$. Знайдемо координати точки N за формулами (2.4), (2.5):

$x_N = \frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $\quad y_N = \frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Остаточно маємо формули для обчислення координат центра мас однорідного трикутника:

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}. \tag{2.8}$$

$$y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}. \tag{2.9}$$

Приклад 2.4. Дано трикутник ABC: $A(4,6)$, $B(2,2)$, $C(5,-5)$. Знайти довжину медіани CL і центр мас трикутника.

Розв'язання: За визначенням медіани точка L - середина сторони AB . За формулами (2.6), (2.7) знайдемо координати точки L (рис. 2.8):

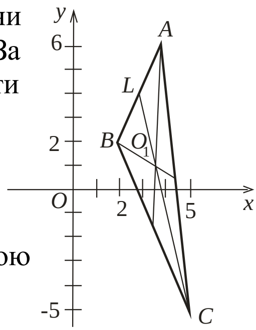


Рис. 2.8.

$x_L = \frac{4+2}{2} = 3$; $y_L = \frac{6+2}{2} = 4$. Отже $L(3,4)$.

Довжину медіани CL обчислимо за формулою (2.1):

$CL = \sqrt{(3-5)^2+(4+5)^2} = \sqrt{85}$ (од.)

Центр мас трикутника знайдемо за формулами (2.8), (2.9):

$x_{O_1} = \frac{4+2+5}{3} = \frac{11}{3}$; $\quad y_{O_1} = \frac{6+2-5}{3} = 1$.

Відповідь: $CL = \sqrt{85}$ (од.), $O_1\left(\frac{11}{3}, 1\right)$.

2.1.5. Площа трикутника

Нехай дано трикутник $M_1M_2M_3$ з координатами вершин $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ (рис. 2.9). Необхідно знайти площу трикутника $M_1M_2M_3$.

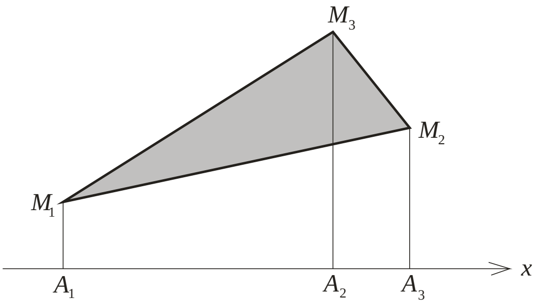


Рис. 2.9.

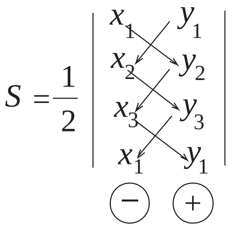
Опустимо перпендикуляри з вершин M_1, M_2, M_3 на вісь Ox. Ми отримали «домівку» з трапецій $A_1M_1M_3A_3$, $A_3M_3M_2A_2$. Шуканий трикутник отримаємо видаленням із «домівки» трапеції $A_1M_1M_2A_2$. Скористаємося формулою «площа трапеції $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, де a, b – основи, h висота», отримуємо:

$$S = \frac{y_1+y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) + \frac{y_3+y_2}{2} \cdot (x_2 - x_3) - \frac{y_1+y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1).$$

Перетворимо цей вираз, і остаточно маємо

$$S = \frac{1}{2} \cdot [(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)]. \quad (2.10)$$

Легко запам'ятати цю формулу за мнемонічним правилом:



Зауваження 1. Додатне значення площі отримуємо при додатному обігу вершин (проти руху годинникової стрілки). В

противному випадку треба брати модуль отриманого результату.

Зауваження 2. Свій результат по обчисленню площі трикутника ми завжди можемо перевірити. Якщо побудувати трикутник у зошиті в клітинку, зрозуміло, що одна клітинка відповідає однієї квадратної одиниці. Підрахувавши клітинки у трикутнику, ми можемо оцінити його площу. Зрозуміло, що цей підрахунок не є точним, але порядок величини оцінити можна.

Приклад 2.5. Обчислити площу трикутника ABC: $A(1{,}5)$, $B(-3{,}0)$, $C(2,-4)$.

Розв'язання: Побудуємо трикутник ABC (рис. 2.10). Як бачимо, вершини розташовані за додатним напрямком. Скористаємося мнемонічним правилом:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \\ 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(0+12+10+15-0+4)=20{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

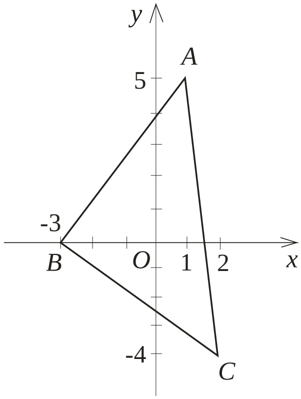


Рис. 2.10.

Відповідь: $S=20{,}5$ (кв. од.).

Зауваження 3. Площа многокутника дорівнює сумі площин трикутників на які його розбити.

Приклад 2.6. Знайти площу п'ятикутника $ABCDE$: $A(-2,-1), B(2,-2)$, $C(4{,}3)$, $D(1{,}4), E(-1{,}2)$

Розв'язання: Розіб'ємо п'ятикутник на три трикутника (рис. 2.11). Площу п'ятикутника знайдемо так:

$$S_{ABCDE}=S_{ABE}+S_{EBD}+S_{DBC}.$$

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 4 + 1 + 2 - 2 + 4) = \frac{13}{2}$$
(кв. од.);

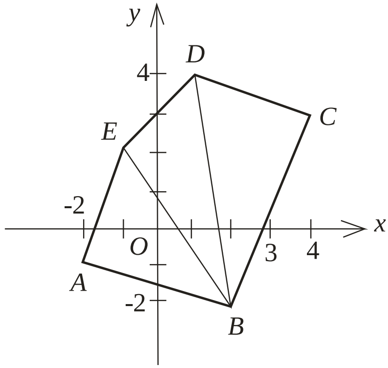


Рис. 2.11.

$$S_{EBD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 8 + 2 - 4 + 2 + 4) = 7 \text{ (кв. од.)};$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2 + 6 + 16 - 8 + 8 - 3) = \frac{17}{2} \text{ (кв. од.)};$$

Отже, остаточно маємо $S_{ABCDE} = \frac{13}{2} + 7 + \frac{17}{2} = 22$ (кв. од.).

Зауваження 4. Формулою (2.10) можна скористатися для розв'язання питання про розташування точок на площині, а саме, чи належать три точки до одної прямої. Зрозуміло, що на трьох точках, що не належать до одної прямої, можна побудувати трикутник (його площа завжди відрізняється від нуля). В тому випадку, коли три точки належать до одної прямої, трикутник перетворюється у відрізок (його площа дорівнює нулю). А тому з формули (2.10) маємо ***умову, за якою три точки належать до одної прямої***:

$$(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) = 0. \quad (2.11)$$

Приклад 2.7. Перевірити, чи належать точки $A(2,2)$, $B(8,6)$, $C(5,4)$ до одної прямої.

Розв'язання: Скористаємося умовою (2.11):

$$(2 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 2) - (2 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2) =$$

$$= 12 + 32 + 10 - 16 - 30 - 8 = 0.$$

Відповідь. Точки $A,\ B,\ C$ належать до одної прямої.

2.2. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

2.2.1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Теорема 2.1. Будь-якій прямій відповідає рівняння першого ступеня.

Доведення: Розглянемо всі можливі випадки розташування прямої на площині (рис. 2.12):

1) нехай пряма паралельна вісі Oy (рис. 2.12,а). Всі точки прямої мають однакову абсцису, тому її рівняння має вигляд:
$$x = a. \qquad (2.12)$$
2) нехай пряма паралельна вісі Ox (рис. 2.12,б). Усі точки прямої мають однакову ординату, тому її рівняння має вигляд:
$$y = b. \qquad (2.13)$$

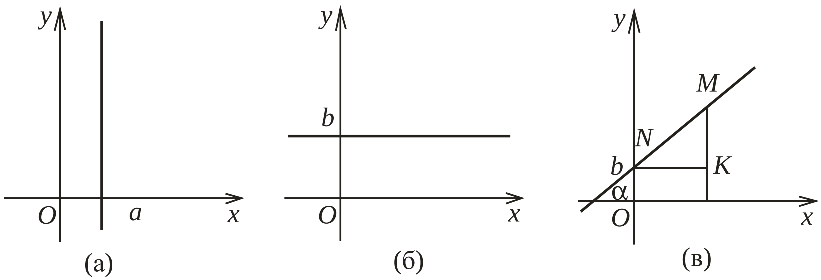


Рис. 2.12.

3) розглянемо загальний випадок розташування прямої на площині (рис. 2.12,в). Нехай α - найменший кут,

на якій потрібно повернути (проти руху годинникової стрілки) додатній напрямок вісі Ox до сполучення з прямою. Позначимо через $k = tg\alpha$ - ***кутовий коефіцієнт прямої***. Позначимо через b - ординату точки перетину N прямої з віссю Oy. Візьмемо будь-яку точку $M(x, y)$ що належить прямій. Проведемо MK і NK паралельно координатним осям. Отриманий трикутник MKN - прямокутний (за побудовою). З прямокутного трикутника маємо:

$$\frac{MK}{NK} = tg\alpha, \; NK = x, \; MK = y - b, \quad \frac{y-b}{x} = tg\alpha, \quad \frac{y-b}{x} = k,$$

$$y = kx + b. \tag{2.14}$$

Рівняння (2.14) має назву ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***.

Зауваження:

1) якщо $k = 0$, пряма паралельна вісі Ox.
2) якщо k додатне, пряма утворює гострий кут з віссю Ox, якщо k від'ємне - тупий кут.
3) якщо пряма перпендикулярна вісі Ox , кутовий коефіцієнт відсутній.

Як бачимо, рівняння (2.12)-(2.14) – рівняння першого ступеня. Теорему доведено.

2.2.2. Загальне рівняння прямої

Теорема 2.2. Будь-якому рівнянню першого ступеня відповідає деяка пряма.

Доведення: Загальний вигляд рівняння першого ступеня

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2.15)$$

Нехай $B = 0$, тоді $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$ (рівняння вигляду 2.12).

Нехай $A = 0$, тоді $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ (рівняння вигляду 2.13).

Нехай $A \neq 0,\ B \neq 0$, тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ (рівняння вигляду 2.14).

В будь-якому випадку рівняння першого ступеня описує пряму лінію. Теорему доведено.

Рівняння (2.15) має назву ***загальне рівняння прямої***.

Зауваження 1:

1) якщо $A = 0$, то пряма паралельна вісі Ox.
2) якщо $B = 0$, то пряма паралельна вісі Oy.
3) якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат.

Зауваження 2. Для того щоб перетворити загальне рівняння прямої в рівняння з кутовим коефіцієнтом, необхідно його розв'язати відносно y.

2.2.3. Рівняння прямої у відрізках

Нехай дано пряму $Ax + By + C = 0$, що не паралельна ні одній з координатних осей та не проходить через початок координат, тобто $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$ (рис. 2.13).

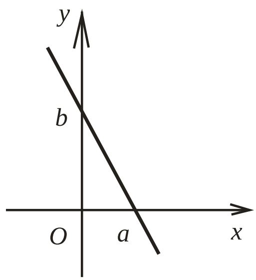


Рис. 2.13

Перетворимо це рівняння наступним чином:

$$Ax + By = -C | : (-C);$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1;$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Нехай $a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2.16)$$

Рівняння (2.16) називається ***рівнянням прямої у відрізках***. Тут a - відрізок, що відсікає пряма на осі абсцис, b - відрізок, що відсікає пряма на осі ординат (рис. 2.13).

Приклад 2.8. Дано ромб, діагоналі якого співпадають з осями координат, і дорівнюють, відповідно, 6 і 10 одиницям довжини. Скласти рівняння сторін ромбу.

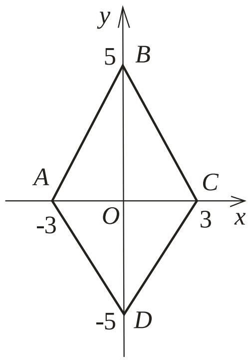


Рис. 2.14

Розв'язання: Згідно властивостей ромбу, його діагоналі перетинаються під прямим кутом і точкою перетину поділяються навпіл. Тому що точкою перетину вони поділяються навпіл, ми відкладемо ліворуч і праворуч від початку координат по 3 одиниці довжини, а догори та донизу – по 5 одиниць (рис. 2.14). Як бачимо, пряма AB відсікає на осі Ox відрізок у (-3) одиниці, а на осі Oy - у 5 одиниць, тоді її рівняння $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$; пряма BC відсікає на осі Ox відрізок у 3 одиниці, а на осі Oy - у 5 одиниць, тоді її рівняння $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$; аналогічно пряма CD відсікає відрізки на осях відповідно у 3 і -5 одиниць, її рівняння $\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$, а пряма DA відсікає відрізки на осях відповідно у -3 і -5 одиниць, її рівняння - $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-5} = 1$.

2.2.4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, які не співпадають (рис. 2.15). Необхідно знайти рівняння прямої, що проходить через ці точки у вигляді $y = kx + b$.

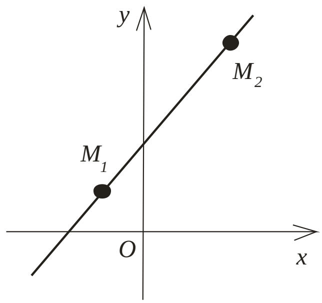


Рис. 2.15.

Нехай M_1 належить прямій, тоді $y_1 = kx_1 + b$. Віднімемо із (2.14) це рівняння: $y - y_1 = k(x - x_1)$. За умовою ця пряма проходить також через точку M_2, а тому координати M_2 задовольняють рівнянню: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Кутовий коефіцієнт шуканої прямої має вигляд:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.17}$$

Таким чином шукане рівняння має вигляд $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ або

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.18}$$

Зауваження. З рівняння (2.18) маємо необхідну і достатню умову того, що три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і $M_3(x_3, y_3)$ належать до однієї прямої:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.19}$$

Приклад 2.9. Дано точки $A(-3,7)$ і $B(4, -2)$. Записати рівняння прямої AB.

Розв'язання: Скористаємось формулою (2.18):

$\frac{y-7}{-2-7} = \frac{x+3}{4+3}$; $\qquad \frac{y-7}{-9} = \frac{x+3}{7}$;

$7(y - 7) = -9(x + 3)$;

$7y = -9x + 22;$

$y = -\frac{9}{7}x + \frac{22}{7}.$

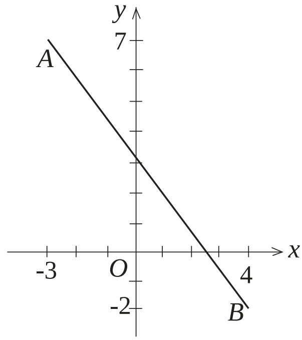


Рис. 2.16.

Перевіримо результат за рисунком 2.16. Дійсно, шукана пряма утворює тупий кут з додатнім напрямком осі абсцис (кутовий коефіцієнт від’ємний) і відсікає відрізок більший за три на додатному напрямку осі ординат ($b = 3\frac{1}{7}$).

Приклад 2.10. Дано трикутник ABC: $A(2,2)$, $B(-3,8)$, $C(-1,-2)$. Знайти рівняння медіани AK.

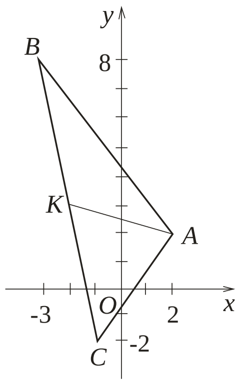


Рис. 2.17.

Розв’язання: За визначенням медіана поділяє сторону навпіл. За формулами (2.6), (2.7) знайдемо координати точки K як середини відрізку BC (рис. 2.17):

$x_k = \frac{-3-1}{2} = -2;\quad y_k = \frac{8-2}{2} = 3;\quad K(-2,3).$

За формулою (2.17) шукане рівняння медіани має вигляд:

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-2}{-2-2};\quad \frac{y-2}{1} = \frac{x-2}{-4};$$

$$-4(y-2) = x-2;\quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}.$$

2.2.5. Рівняння прямої, що проходить через дану точку $A(x, y)$ у даному напрямку k

Будемо шукати рівняння у вигляді (2.14). Кутовий коефіцієнт за умовою відомий, а невідоме b знайдемо з умови проходження прямої через точку A: $b = y_1 - kx_1$. Підставимо b у рівняння (2.14): $y = kx + y_1 - kx_1$, або

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (2.20)$$

Приклад 2.10. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(3{,}5)$ і утворює кут $\alpha = 45^0$ з додатним напрямком осі Ox.

Розв'язання: За означення $k = tg\alpha = tg45^0 = 1$. Скористаємось формулою (2.20), отримаємо $y - 5 = 1 \cdot (x - 3)$. Шукане рівняння має вигляд $y = x + 2$.

2.2.6. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай дано прямі I і II: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$. Їх кутові коефіцієнти $k_1 = tg\alpha_1$ і $k_2 = tg\alpha_2$. Розглянемо всі можливі випадки взаємного розташування двох прямих на площині:

1) нехай прямі I і II паралельні (рис. 2.18, а), тоді кути, що утворюють ці прямі з додатним напрямком осі абсцис рівні: $\alpha_1 = \alpha_2$.
   Тому $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, і, відповідно
   $$k_1 = k_2; \qquad (2.21)$$
2) нехай прямі I і II перпендикулярні (рис. 2.18, б). З теореми про зовнішній кут трикутника прямує $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$. Отже
   $k_2 = tg\alpha_2 = tg(\alpha_1 + 90^0) = -ctg\alpha_1 =$
   $= -\frac{1}{tg\alpha_1} = -\frac{1}{k_1}$; остаточно маємо
   $$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (2.22)$$
3) нехай прямі I і II перетинаються під довільним кутом ϑ (рис. 2.18, в). Під ϑ ми розуміємо найменший кут, на який потрібно повернути проти ходу

годинникової стрілки пряму I до прямої II щоб вони збіглися. Таким чином прямі I і II не рівноправні! Скористаємось теоремою про зовнішній кут трикутника:

$$\alpha_2 = \vartheta + \alpha_1; \qquad \vartheta = \alpha_2 - \alpha_1;$$

$$tg\vartheta = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2};$$

або

$$tg\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \tag{2.23}$$

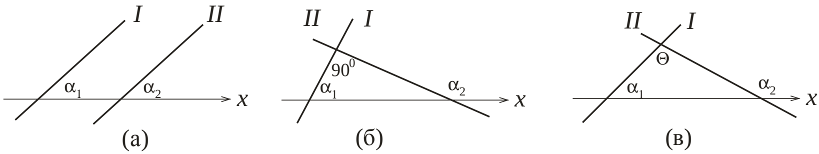


Рис. 2.18.

Приклад 2.12. Дано дві прямі:

1) $y = 7x - 13; \quad y = 7x + 5;$
2) $y = \frac{1}{3}x + 2; \quad y = -3x + 8;$
3) $y = 2x - 6; \quad y = 5x - 1.$

З'ясувати взаємне розташування прямих, визначити кут між прямими.

Розв'язання:

1) кутові коефіцієнти прямих $k_1 = k_2 = 7$ задовольняють умові паралельності прямих (2.21). Прямі паралельні;
2) кутові коефіцієнти прямих $k_1 = \frac{1}{3}$; $k_2 = -3$ задовольняють умові перпендикулярності прямих (2.22). Прямі перпендикулярні;
3) кутові коефіцієнти прямих $k_1 = 2$, $k_2 = 5$. Знайдемо кут між прямими за формулою (2.23):

$$tg\vartheta = \frac{5-2}{1+2\cdot 5} = \frac{3}{11}; \qquad \vartheta = arctg\,\frac{3}{11}.$$

Приклад 2.13. Дано трикутник ABC: $A(-4{,}3)$, $B(2{,}5)$, $C(-5{,}9)$. Знайти:

1) кути трикутника;
2) рівняння висоти CN;
3) рівняння прямої l, що проходить через вершину B паралельно стороні AC.

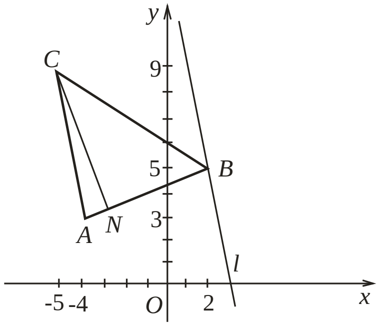


Рис. 2.19

Розв'язання: Побудуємо трикутник (рис. 2.19). Знайдемо за формулою (2.17) кутові коефіцієнти сторін трикутника: $k_{AB} = \frac{5-3}{2+4} = \frac{1}{3}$; $k_{BC} = \frac{9-5}{-5-2} = -\frac{4}{7}$;

$k_{AC} = \frac{9-3}{-5+4} = -6$.

1) знайдемо кути трикутника за формулою (2.23):

$$tg < BAC = \frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}} = \frac{-6-\frac{1}{3}}{1+(-6)\cdot\frac{1}{3}} = \frac{19}{3}; \quad < BAC = arctg\,\frac{19}{3};$$

$$tg < ABC = \frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{Bc}} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{7}}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)} = \frac{19}{17}; \quad < ABC = arctg\,\frac{19}{17};$$

$$tg < ACB = \frac{k_{BC}-k_{AC}}{1+k_{AC}k_{Bc}} = \frac{-\frac{4}{7}+6}{1+(-6)\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)} = \frac{38}{31}; \quad < ACB = arctg\,\frac{38}{31}.$$

2) висота CN перпендикулярна до сторони AB. За умовою перпендикулярності прямих (2.22) маємо:

$k_{CN} = -\frac{1}{k_{AB}} = -3$. Скористаємося формулою (2.20): $y - 9 = -3(x + 5)$. Рівняння шуканої висоти має вигляд: $y = -3x - 6$.

3) за умовою паралельності прямих: $k_l = k_{AC} = -6$. За формулою (2.20): $y - 5 = -6(x - 2)$, рівняння шуканої прямої має вигляд: $y = -6x + 17$.

2.2.7. Нормальне рівняння прямої

Нехай пряма задана загальним рівнянням (2.15). Помножимо це рівняння на деякий множник $M \neq 0$:

$$MAx + MBy + MC = 0.$$

Позначимо $MA = cos\alpha$; $MB = sin\alpha$; $MC = -p$. В такому випадку (2.15) рівняння набуде вигляду:

$$x \cdot cos\alpha + y \cdot sin\alpha - p = 0. \quad (2.24)$$

Рівняння (2.24) має назву ***нормального рівняння*** прямої.

Коефіцієнт M називається ***нормуючим множником***. Знайдемо його, якщо скористаємось основною тригонометричною тотожністю: $(MA)^2 = cos^2\alpha$; $(MB)^2 = sin^2\alpha$; $(MA)^2 + (MB)^2 = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$; $M^2(A^2 + B^2) = 1$, або

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad (2.25)$$

Знак нормуючого множника обирається протилежним до знаку C.

Спробуємо з'ясувати геометричний зміст кута α: $MA = cos\alpha$; $MB = sin\alpha$.

$cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Поділимо ці вирази: $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{B}{A}$, тобто $k = tg\alpha = \frac{B}{A}$.

В рівнянні (2.15) кутовий коефіцієнт прямої дорівнює $k = -\frac{B}{A}$. Бачимо, що ці кутові коефіцієнти задовольняють умові перпендикулярності (2.22). А тому зрозуміло, що кут α описує пряму, що перпендикулярна до шуканій. Довжина відрізка від початку координат до точки перетину цих прямих дорівнює p (рис. 2.20).

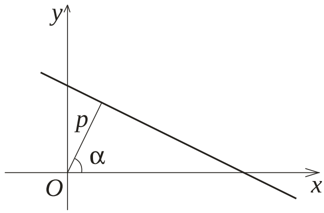


Рис. 2.20.

Приклад 2.14. Прямі задані рівняннями:

1) $3y - 2x + 7 = 0$;
2) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y - 12 = 0$;
3) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$.

З'ясувати, чи задані ці прямі нормальними рівняннями? Якщо ні, привести рівняння до нормального вигляду.

Розв'язання: Перевіримо виконання умови $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$. Якщо пряма задана нормальним рівнянням, то коефіцієнт при x є $cos\alpha$, а при y - $sin\alpha$:

1) $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 3^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13 \neq 1$.
Умова не виконується. Рівняння не є нормальним. Приведемо його до нормального вигляду:
$M = \pm\frac{1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}$. Обираємо знак обернений до C, а саме «$-$».
$3y - 2x + 7 = 0 \Big| \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$;
$-\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{7}{\sqrt{13}} = 0$.

2) $cos^2\alpha + sin^2\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{9} = \frac{97}{144} \neq 1$
   Умова не виконується. Рівняння не є нормальним. Приведемо його до нормального вигляду:
   $M = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \pm \frac{1}{\frac{\sqrt{97}}{12}} = \pm \frac{12}{\sqrt{97}}$. Обираємо знак протилежний C, а саме «+».
   $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y - 12 = 0 \Big| \quad \cdot \frac{12}{\sqrt{97}}$;
   $$\frac{9}{\sqrt{97}}x + \frac{4}{\sqrt{97}}y - \frac{1}{\sqrt{97}} = 0.$$
3) $cos^2\alpha + sin^2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$ Умова виконується, тому це рівняння – нормальне.

Приклад 2.15. Дано рівняння прямої $\frac{x-7}{2} + 5 = -\frac{2}{3} - (3x - 2y)$. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

1) загального рівняння;
2) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
3) рівняння у відрізках;
4) нормального рівняння.

Розв'язання:

1) перетворимо початкове рівняння. Помножимо весь вираз на 6 (щоб позбутися знаменників):
   $3x - 21 + 30 = -4 - 18x + 12y$; перенесемо все ліворуч; приведемо подібні; остаточно маємо загальне рівняння прямої:
   $$21x - 12y + 34 = 0;$$
2) розв'яжемо отримане у п. 1 загальне рівняння відносно y і отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:
   $$y = \frac{7}{4}x + \frac{17}{6};$$
3) перенесемо у загальному рівнянні вільний член праворуч

$21x - 12y = -34$. Поділимо отриманий вираз на -34, скоротимо. Отримаємо рівняння прямої у відрізках:

$$-\frac{21}{34}x + \frac{6}{17}y = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x}{-\frac{34}{21}} + \frac{y}{\frac{17}{6}} = 1;$$

4) помножимо загальне рівняння на нормуючий множник $M = -\frac{1}{\sqrt{21^2+(-12)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{585}} = -\frac{1}{3\sqrt{65}}$. Нормальне рівняння заданої прямої має вигляд:

$$-\frac{7}{\sqrt{65}}x + \frac{4}{\sqrt{65}}y - \frac{34}{3\sqrt{65}} = 0.$$

2.2.8. Відстань від точки до прямої

Нехай дано довільну точку $M(x_0, y_0)$ і пряму $Ax + By + C = 0$. Позначимо шукану відстань як d. Якщо точка M належить прямій, відповідь очевидна: $d = 0$. В загальному випадку (M не належить прямій), для розв'язання питання, потрібно виконати додаткові побудови (рис. 2.21).

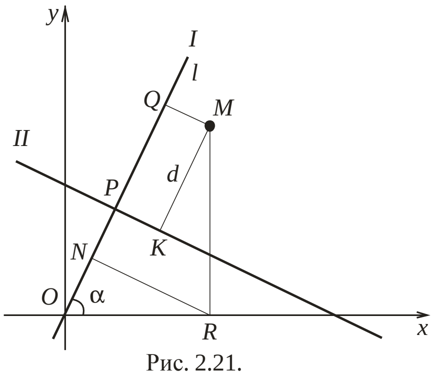


Рис. 2.21.

Позначимо задану пряму як II, а пряму, що їй перпендикулярна як I. Розглянемо замкнену ламану $OPKRO$. На відрізку OP оберемо додатній напрям від точки O до точки P і позначимо цю вісь як l.

Довжина відрізка $KM = d$.

Зробимо проекцію замкненої ламаної на вісь l. Відомо, що сума проекцій замкненої ламаної дорівнює нулю:

$$np_l OP + np_l PK + np_l KM + np_l MR + np_l RO = 0.$$

Розглянемо кожну проекцію: $np_l OP = p$; $np_l PK = 0$; $np_l KM = d$; $np_l MR = -NQ = -y_0 \cdot sin\alpha$; $np_l RO = -NO = -x_0 \cdot cos\alpha$.

Додамо отримані значення $p + d - y_0 \cdot sin\alpha - x_0 \cdot cos\alpha = 0$. Остаточно маємо

$$d = |x_0 \cdot cos\alpha + y_0 \cdot sin\alpha - p|. \qquad (2.26)$$

Бачимо, що для того, щоб знайти відстань від точки до прямої, необхідно привести її рівняння до нормального вигляду і підставити в нього координати x_0, y_0 точки M. Оскільки нас цікавить відстань від точки до прямої, а не її розташування, то у формулі (2.26) обчислену величину d беремо за модулем.

Зауваження: Якщо задана точка M і початок координат розташовані з різних сторін прямої II, то d отримаємо зі знаком «+», якщо з однієї – зі знаком «−».

Якщо пряма задана загальним рівнянням, то формула (2.26) набуває вигляду:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.27)$$

Приклад 2.16. Дано трикутник ABC: $A(-4,-6)$, $B(-2,4)$, $C(6,0)$. Знайти довжину висоти BM.

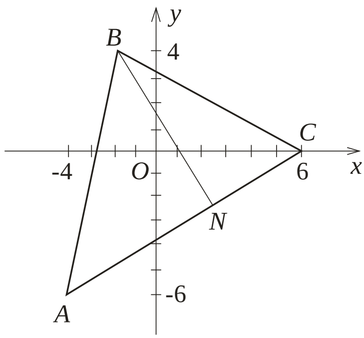


Рис. 2.22.

Розв'язання: Довжина висоти BM - це відстань від точки B до прямої AC (рис. 2.22). Знайдемо рівняння сторони AC як прямої, що проходить через дві задані точки (2.18): $\frac{y+6}{0+6} = \frac{x+4}{6+4}$. Запишемо це рівняння у вигляді загального рівняння прямої: $3x - 5y - 18 = 0$.

Для знаходження довжини висоти скористаємось формулою (2.27):

$$d = BM = \frac{|3\cdot(-2)-5\cdot4-18|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}} = \frac{44}{\sqrt{34}} \text{ (од.)}.$$

2.2.9. Взаємне розташування прямих на площині

Нехай дано дві прямі, що задані загальними рівняннями (2.15):

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0; \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Із загальних міркувань зрозуміло, що можливі наступні випадки взаємного розташування прямих на площині: прямі можуть перетинатися в одній точці, можуть не перетинатися – бути паралельними або збігатися.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases} \tag{2.28}$$

Для розв'язання системи (2.28) за правилами Крамера, обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Можливі наступні випадки:

1) визначник системи $\Delta \neq 0$ (ранг матриці дорівнює двом), тобто система (2.28) сумісна і визначена. За формулами Крамера маємо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \tag{2.29}$$

Цей випадок відподвідає ситуації, коли прямі перетинаються, тому за формулами (2.29) знаходимо координати точки перетину прямих;

2) визначник системи $\Delta = 0$. В даному випадку можливі ситуації:

а) ранг розширеної матриці дорівнює двом, тобто хоча б один з визначників Δ_x або Δ_y відмінний від нуля. Тоді за теоремою Кронекера-Капеллі система (2.28) несумісна. Це означає, що прямі паралельні;

б) ранг розширеної матриці дорівнює одиниці, тобто всі визначники дорівнюють нулю: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. За теоремою Кронекера-Капеллі така система має нескінчену множину розв'язків. Це відповідає ситуації, коли прямі збігаються.

Приклад 2.17. Знайти точки перетину двох прямих $3x - 5y + 7 = 0$ і $-4x + 2y + 3 = 0$.

Розв'язання: $A_1 = 3,\ B_1 = -5,\ C_1 = 7;\ A_2 = -4,\ B_2 = 2,\ C_2 = 3$. За формулами (2.29) маємо:

$$x = \frac{-5\cdot 3 - 2\cdot 7}{3\cdot 2 - (-4)\cdot(-5)} = \frac{29}{14}; \quad y = \frac{-4\cdot 7 - 3\cdot 3}{3\cdot 2 - (-4)\cdot(-5)} = \frac{37}{14}.$$

Отже точка перетину прямих має координати $P\left(\frac{29}{14}, \frac{37}{14}\right)$.

2.3. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

Визначення 2.2. Якщо $F(x, y)$ - многочлен другого степеня, то лінія, яка визначається цим рівнянням називається ***лінією другого порядку***

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \qquad (2.30)$$

В залежності від співвідношення коефіцієнтів рівняння (2.30) може визначати коло, еліпс, гіперболу параболу.

2.3.1. Коло

Визначення 2.3. ***Коло*** – це геометричне місце точок, що рівновіддалені від однієї точки, яка називається ***центром кола.*** Відстань від центра кола до будь-якої точки кола називається ***радіусом кола***.

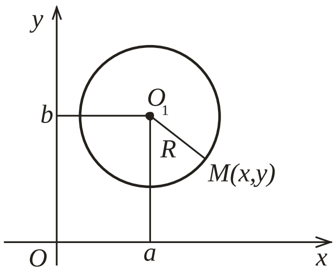


Рис. 2.23.

Виведемо рівняння кола згідно з визначенням. Нехай $M(x,y)$ - будь-яка точка кола, $O(a,b)$ – центр кола, R-радіус (рис. 2.23):

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \qquad (2.31)$$

Рівняння (2.31) називається ***канонічним рівнянням кола***.

Перетворимо (2.31):

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 - R^2 = 0.$$

Порівнюємо з (2.30), маємо $A = 1,\ B = 1,\ C = 0,\ \ D = -2a,$ $E = -2b,\ \ F = a^2 + b^2 - R^2$. Отже, рівняння (2.30) описують коло, якщо коефіцієнти при квадратах x і y дорівнюють один одному, а коефіцієнт при добутку xy дорівнює нулю.

Приклад 2.18. Скласти канонічні рівняння кола якщо відомо, що:

а) центр знаходиться у точці $O_1(2,-5)$ і $R = 4$;

б) центр знаходиться у точці $O_1(3{,}7)$ і коло проходить через точку $M(-4{,}2)$;

в) відомі координати кінців одного з діаметрів кола AB: $A(2,-3)$, $B(6{,}5)$.

Розв'язання:

а) за формулою (2.31) маємо $(x-2)^2+(y+5)^2=16$;

б) знайдемо радіус кола за формулою (2.1):

$$R=O_1M=\sqrt{(-4-3)^2+(2-7)^2}=\sqrt{74}$$

$$(x-3)^2+(y-7)^2=74;$$

в) за визначенням діаметру, знайдемо за формулами (2.6), (2.7) координати центра кола як координати середини відрізка AB: $x_{o_1}=\frac{2+6}{2}=4$; $y_{o_1}=\frac{-3+5}{2}=1$. Радіус знайдемо як довжину відрізка AO_1:

$$R=AO_1=\sqrt{(4-2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\,.$$

$$(x-4)^2+(y-1)^2=20.$$

Приклад 2.19. Визначити, яку лінію задає рівняння

$$x^2+y^2-6x+8y-11=0?$$

Розв'язання: Коефіцієнти $A=1$, $B=1$, $C=0$, тому загальне рівняння лінії другого порядку описує коло. Для того, щоб привести його до канонічного вигляду, необхідно виділити повний квадрат

$$(x^2-6x+9)-9+(y^2+8y+16)-16-11=0;$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=36.$$

Отже, центр кола розташовано в точці $O_1(3,-4)$, а радіус $R=6$.

2.3.2. Еліпс

Визначення 2.4. ***Еліпс*** – це геометричне місце точок, сума відстаней до якиx від двох заданих точок (що називаються фокусами) є величина стала і більша за відстань між фокусами.

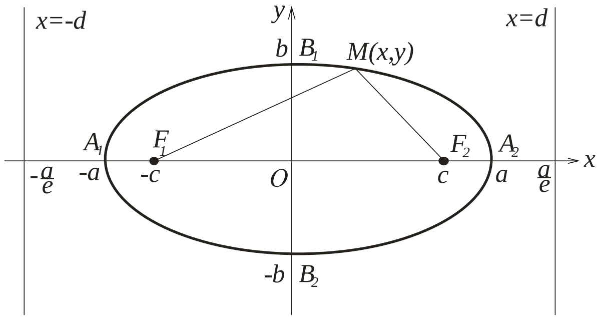


Рис. 2.24.

Нехай $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ - фокуси еліпса. Якщо точка $M(x, y)$ – будь-яка точка еліпса (рис. 2.24), то за визначенням маємо

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a, \tag{2.32}$$

де a – дана стала величина. $|F_1M|$ і $|F_2M|$ - фокальні радіуси. Знайдемо їх довжини:

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Підставимо їх у рівність (2.32):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднесемо його до квадрату і виконаємо відповідні перетворення:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 =$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx; \quad |:4$

$a^2((x-c)^2+y^2) = (a^2-cx)^2;$

$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$

$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \ |: \ a^2(a^2-c^2).$

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2$ і отримаємо ***канонічне рівняння еліпсу***:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.33)$$

Точки перетину з осями симетрії, які в нашому випадку співпадають з осями координат, називаються вершинами еліпса: $A_1(-a,0), A_2(a,0),\ B_1(0,b), B_2(0,-b)$. $|OA| = a$ - велика піввісь еліпса, $|OB| = b$ - мала піввісь еліпса.

Визначення 2.5. ***Ексцентриситетом*** називається відношення відстані між фокусами еліпса до довжини його великої осі:

$$e = \frac{2c}{2a} < 1 \quad \text{або} \quad e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \qquad (2.34)$$

Ексцентриситет характеризує форму еліпса: чим ближче e до 1, тим менше відношення $\frac{b}{a}$, і тим більше витягнутий еліпс; і навпаки: чим менше ексцентриситет, тим ближче відношення $\frac{b}{a}$ до 1 і тим ближче еліпс за формою наближається до кола.

Визначення 2.6. Нехай $a > b$ (рис. 2.24). Дві прямі, що перпендикулярні великій осі і розташовані на відстані $\frac{a}{e}$ від центра, називаються ***директрисами еліпса***:

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e}. \qquad (2.35)$$

Оскільки $e < 1$, то права директриса розташована праворуч від правої вершини, а ліва – ліворуч від лівої вершини.

Властивість директрис еліпса. Якщо r - відстань від будь-якої точки еліпса до будь-якого фокуса, d - відстань від тієї ж точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ величина незмінна і дорівнює ексцентриситету еліпса:

$$\frac{r}{d} = e \tag{2.36}$$

Приклад 2.20. Знайти довжину півосей, ексцентриситет, координати фокусів і вершин, скласти рівняння директрис еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Розв'язання:

за умовою $a^2 = 16$; $\rightarrow$ $a = 4$; отже велика піввісь дорівнює 4, аналогічно $b^2 = 9$; $\rightarrow$ $b = 3$ - мала піввісь дорівнює 3. Координати вершин еліпса $A_1(-4{,}0)$, $A_2(4{,}0)$, $B_1(0{,}3)$, $B_2(0, -3)$.

Знайдемо координати фокусів. Для цього скористаємось основною тотожністю для еліпса:

$$b^2 = a^2 - c^2; \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7; \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{7};$$

отже фокуси мають координати $F_1\left(-\sqrt{7},\ 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{7},\ 0\right)$.

Для знаходження ексцентриситету скористаємось формулою (2.34):

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} < 1.$$

Директриси знайдемо за формулою (2.35): $d = \frac{a}{e} = \frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{16}{\sqrt{7}}$; їх рівняння

$$x = \pm\frac{16}{\sqrt{7}}.$$

Приклад 2.21. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що:

а) мала піввісь дорівнює 3, а фокус розташований у точці $F(\sqrt{5}, 0)$;

б) велика піввісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e = \frac{2}{5}$;

в) еліпс проходить через точки $A(4,0), B(-3, \sqrt{2})$.

Розв'язання:

а) за умовою $b = 3$, $c = \sqrt{5}$. Знайдемо a із тотожності $b^2 = a^2 - c^2$. $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{9+5} = \sqrt{14}$. Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

б) за умовою $a = 10$, $e = \frac{2}{5}$. Скористаємось формулою (2.34):

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{5}, \qquad c = \frac{2}{5}a = \frac{2}{5}\cdot 10 = 4.$$

Знайдемо малу піввісь:

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{84} = 1.$$

в) за умовою дані точки A і B належать еліпсу, тому їх координати задовольняють його рівнянню:

$$\begin{cases} \frac{4^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(-3)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \frac{16}{a^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a^2 = 16 \\ \frac{9}{16} + \frac{2}{b^2} = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ \frac{2}{b^2} = 1 - \frac{9}{16} \end{cases}; \qquad \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = \frac{32}{7} \end{cases}.$$

Канонічне рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{16} + \frac{7y^2}{32} = 1$.

Приклад 2.22. Обчислити ексцентриситет еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює середньому арифметичному довжин його осей.

Розв'язання: За умовою $2c = \frac{2a+2b}{2}$ або $2c = a + b$. Скористаємося основною тотожністю для еліпса $b^2 = a^2 - c^2$:

$$2c = a + \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Піднесемо цю рівність до квадрату і виконаємо відповідні перетворення:

$$4c^2 = a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2} + a^2 - c^2;$$

$$5c^2 = 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - c^2} \qquad |: a^2.$$

За визначенням $e = \frac{c}{a}$, маємо: $5e^2 = 2 + 2\sqrt{1 - e^2}$. Розв'яжемо це рівняння відносно e:

$$\left(2\sqrt{1 - e^2}\right)^2 = (5e^2 - 2)^2;$$

$$4 - 4e^2 = 25e^4 - 20e^2 + 4;$$

$$25e^4 - 16e^2 = 0.$$

Рівняння розпадається на два: $e^2 = 0$ або $25e^2 - 16 = 0$. Перше не має сенсу, з другого маємо $e = \frac{4}{5}$ (може бути лише додатнім).

2.3.3. Гіпербола

Визначення 2.7. ***Гіперболою*** називається геометричне місце точок, для яких різниця відстаней від двох заданих точок (що називаються фокусами) є стала додатна величина, менша за відстань між фокусами.

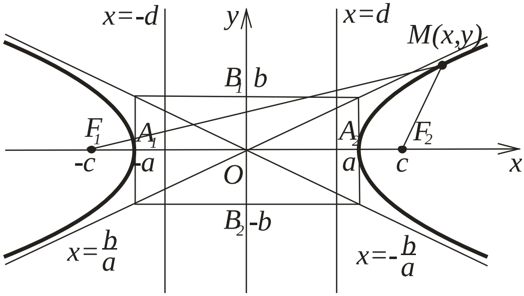


Рис. 2.25.

Нехай $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ - фокуси гіперболи. Якщо точка $M(x, y)$ – будь-яка точка гіперболи (рис. 2.25), то за визначенням маємо

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a, \tag{2.37}$$

тут a - деяка стала додатна величина з визначення, $|F_1M|$ і $|F_2M|$ - фокальні радіуси. Знак «плюс» беремо, коли $|F_1M| > |F_2M|$ і «мінус», коли $|F_1M| < |F_2M|$.

За визначенням (2.37) і умовою, що $|F_1M| > |F_2M|$, маємо:

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$; або

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Піднесемо цю рівність до квадрату і виконаємо відповідні перетворення:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 =$$

$$= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4cx - 4a^2; \quad |:4$$

$$a^2((x-c)^2+y^2) = (cx-a^2)^2;$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4;$$

$$(a^2-c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \quad |:\ a^2(a^2-c^2)$$

Позначимо $b^2 = c^2 - a^2$ і отримаємо ***канонічне рівняння гіперболи***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.38)$$

Точки перетину гіперболи з віссю Ox називаються її вершинами гіперболи: $A_1(-a,0), A_2(a,0)$ Початок координат $O(0,0)$ – є центром гіперболи, відрізки A_1A_2 - дійсною віссю, B_1B_2 - умовною віссю гіперболи.

Визначення 2.8. ***Асимптотами*** гіперболи є прямі лінії, які задовольняють умові: якщо точка $(x, f(x))$ рухається вздовж вітки графіка функції до нескінченності, відстань від цієї точки до названої прямої прямує до нуля.

Знайдемо рівняння асимптоти. Розв'яжемо рівняння (2.38) відносно y:

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}.$$

За визначенням асимптоти спрямуємо $x \to \infty$, маємо:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \qquad (2.39)$$

Визначення 2.9. ***Ексцентриситетом*** називається відношення відстані між фокусами гіперболи до довжини його дійсної осі:

$$e = \frac{2c}{2a} > 1 \quad \text{або} \quad e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \qquad (2.40)$$

Ексцентриситет характеризує форму гіперболи: чим менше e, тим більше витягнутий основний прямокутник гіперболи у напрямку осі, яка об'єднує вершини

Визначення 2.10. Дві прямі, що перпендикулярні великій осі і розташовані на відстані $\frac{a}{e}$ від центра, називаються ***директрисами гіперболи***:

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e}. \qquad (2.41)$$

Оскільки $e > 1$, то права директриса розташована між правою вершиною і центром гіперболи, а ліва – між лівою вершиною і центром (рис. 2.25).

Властивість директрис гіперболи. Якщо r - відстань від будь-якої точки гіперболи до будь-якого фокуса, d - відстань від тієї ж точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ величина стала і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{r}{d} = e. \qquad (2.42)$$

Визначення 2.11. Гіпербола, у якої дійсна і уявна піввісь мають однакову довжину $(a = b)$ називається ***рівносторонньою***.

Визначення 2.12. Гіпербола $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ називається ***спряженою*** до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Її дійсна вісь розташована вздовж осі Oy. Спряжені гіперболи мають ті ж самі асимптоти.

Приклад 2.23. Знайти довжину півосей, ексцентриситет, координати фокусів і вершин, скласти рівняння директрис і асимптот гіперболи $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{4}=1$.

Розв'язання:

За умовою $a^2=32$; $\rightarrow$ $a=4\sqrt{2}$; отже дійсна піввісь дорівнює $4\sqrt{2}$, аналогічно $b^2=4$; $\rightarrow$ $b=2$ - уявна піввісь дорівнює 2. Координати вершин гіперболи $A_1\left(-4\sqrt{2},0\right)$, $A_2\left(4\sqrt{2},0\right)$.

Знайдемо координати фокусів. Для цього скористаємось основною тотожністю для гіперболи:

$$b^2=c^2-a^2; \quad \rightarrow \quad c^2=a^2+b^2=32+4=36; \quad \rightarrow \quad c=6.$$

Отже фокуси мають координати $F_1(-6,\ 0)$, $F_2(6,\ 0)$.

Для знаходження ексцентриситету скористаємось формулою (2.40):

$$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{4\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}>1.$$

Директриси знайдемо за формулою (2.41): $d=\frac{a}{e}=\frac{4\sqrt{2}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}}=\frac{16}{3}$; їх рівняння

$$x=\pm\frac{16}{3}.$$

Кутовий коефіцієнт асимптоти, згідно з формулою (2.39): $k=\frac{b}{a}=\frac{2}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Отже, рівняння асимптот $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}x.$

Приклад 2.24. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що:

а) уявна вісь дорівнює 5, а фокус розташований в точці $F(-12{,}0)$;

б) ексцентриситет гіперболи дорівнює $\frac{7}{5}$, а відстань від вершини до найближчого фокуса дорівнює 2;

в) точка $M(3,-1)$ належить гіперболі, а асимптотами є прямі $y = \pm 2x$.

Розв'язання:

а) скористаємося основною тотожністю для гіперболи: $b^2 = c^2 - a^2$, $a^2 = c^2 - b^2 = 144 - 25 = 119$. Шукане рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{119} - \frac{y^2}{25} = 1$;

б) за умовою $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5}$ і $c - a = 2$. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{7}{5} \\ c - a = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = \frac{7}{5}a \\ \frac{7}{5}a - a = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = 7 \\ a = 5 \end{cases}.$$

Скористаємося основною тотожністю:

$b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$, маємо рівняння: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$;

в) за умовою точка $M(3,-1)$ належить гіперболі, отже її координати задовольняють рівнянню гіперболи: $\frac{3^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{b^2} = 1$; кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $k = \frac{b}{a} = 2$. Складемо систему і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \\ b = 2a \end{cases}; \quad \begin{cases} 4a^2 = 35 \\ b = 2a \end{cases}; \quad \begin{cases} a = \frac{\sqrt{35}}{2} \\ b = \sqrt{35} \end{cases}.$$

Отже шукане рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{4x^2}{35} - \frac{y^2}{35} = 1.$

2.3.4. Парабола

Визначення 2.13. ***Параболою*** називається геометричне місце точок, для яких відстань від заданої точки, що називається фокусом, дорівнює відстані до певної заданої прямої, що називається директрисою.

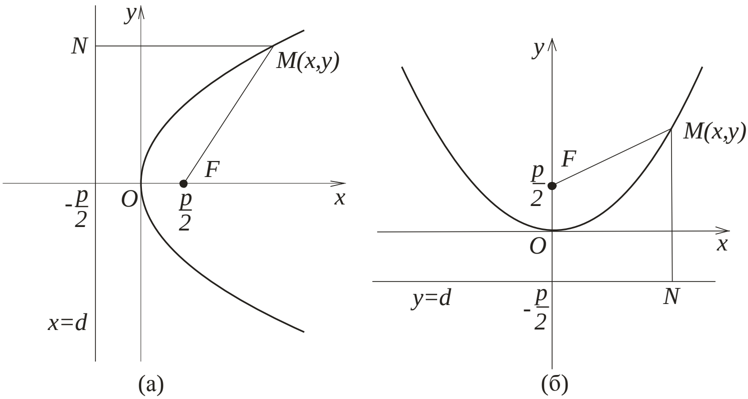


Рис. 2.26.

Нехай $M(x, y)$ – будь-яка точка гіперболи (рис. 2.26,а), то за визначенням маємо

$$|FM| = |MN|. \tag{2.43}$$

Нехай фокус має координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса задана рівнянням $x = -\frac{p}{2}$, згідно з умовою (2.43) маємо:

$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}; \qquad x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$

Канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px. \qquad (2.44)$$

Точка перетину параболи з віссю симетрії називається вершиною параболи. В нашому випадку вершина співпадає з початком координат.

Рівняння (2.44) описує параболу, що симетрична вісі Ox.

Якщо розглянемо параболу (рис. 2.26,б) симетричну вісі Oy, то її фокус має координати $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, а директриса задана рівнянням $y=-\frac{p}{2}$. Канонічне рівняння такої параболи має вигляд:

$$x^2 = 2py. \qquad (2.45)$$

Параметр p, що входить до рівнянь (2.44), (2.45) називається ***параметром параболи***.

Ексцентриситет параболи $e=1$.

Приклад 2.25. Визначити координати фокуса і записати рівняння директриси параболи $y^2=7x$.

Розв'язання: За умовою $2p=7$, тобто $p=\frac{7}{2}$. Отже фокус має координати $F\left(\frac{7}{4},0\right)$, а рівняння директриси $x=-\frac{7}{4}$.

Приклад 2.26. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо відомо, що:

а) фокус має координати $F(-3,0)$;

б) відстань між фокусом і директрисою дорівнює 8 (парабола симетрична відносно осі Ox);

в) рівняння директриси $y = -\frac{3}{5}$.

Розв'язання:

а) шукана парабола симетрична відносно осі Ox. За умовою $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, тому $\frac{p}{2} = -3$; $p = -6$. Рівняння параболи має вигляд: $y^2 = -12x$;

б) відстань між фокусом і директрисою (см. рис. 2.26,а) дорівнює p, а тому $p = 8$. Шукане рівняння: $y^2 = 16x$;

в) за визначенням $y = -\frac{p}{2}$. Отже $-\frac{p}{2} = -\frac{3}{5}$, $p = \frac{6}{5}$, рівняння параболи має вигляд: $x^2 = \frac{12}{5}y$.

2.3.5. Приклади розв'язання задач з аналітичної геометрії на площині

Спробуємо об'єднати отримані у другому розділі знання для розв'язання деяких задач. Приклади, що були наведені у кожному підрозділі, можна назвати «шаблонними». Їх розв'язання зводилось к використанню тієї чи іншої приведеної поруч формули. Зараз ми розглянемо приклади, які потребують від нас більшої уваги і кмітливості, тому що розв'язання кожного з них вимагає знання понять і формул відразу декількох тем.

Приклад 2.27. Записати рівняння прямої, що проходить через ліву та верхню вершини еліпса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Розв'язання: За умовою $a = 8$, $b = 5$, тобто координати шуканих вершин - $A_1(-8,0)$, $B_1(0,5)$. Скористаємося рівнянням прямої у відрізках (2.16), запишемо рівняння шуканої прямої $\frac{x}{-8} + \frac{y}{5} = 1$.

Приклад 2.28. Записати рівняння кола, що має центр в точці перетину прямих $2x - 3y + 8 = 0$ і $x + 2y - 3 = 0$, і дотикається осі Oy.

Розв'язання: Знайдемо точку перетину прямих за формулою (2.29):

$$x = \frac{-3\cdot(-3) - 2\cdot 8}{2\cdot 2 - (-3)\cdot 1} = \frac{-7}{7} = -1; \quad x = \frac{1\cdot 8 - 2\cdot(-3)}{2\cdot 2 - (-3)\cdot 1} = \frac{14}{7} = 2.$$

Отже центр кола має координати: $O_1(-1{,}2)$. За означенням, відстань від центра кола до будь якої точки, що йому належить, дорівнює радіусу. Знайдемо радіус кола як відстань від центра до осі Oy $(x = 0)$за формулою (2.27): $R = d = 1$. Остаточно маємо канонічне рівняння кола: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Приклад 2.29. Записати рівняння еліпсу, вершини якого співпадають з фокусами гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$, а фокуси розташовані у вершинах гіперболи.

Розв'язання: За умовою $a_\text{г} = c_\text{е}$, $c_\text{г} = a_\text{е}$. Маємо $a_\text{г} = 5$, $b_\text{г} = 2\sqrt{6}$. Знайдемо $c_\text{г} = \sqrt{a_\text{г}^2 + b_\text{г}^2} = \sqrt{25 + 24} = 7$. Отже $c_\text{е} = 5$, $a_\text{е} = 7$. Знайдемо

$b_\text{е} = \sqrt{a_\text{е}^2 - c_\text{е}^2} = \sqrt{49 - 25} = 2\sqrt{6}$. А тому канонічне рівняння еліпсу має вигляд: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$.

Приклад 2.30. Записати рівняння параболи, вершина якої розташована у початку координат, а директриса проходить через правий фокус еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.

Розв'язання: Зрозуміло, що шукана парабола симетрична відносно осі Ox, а тому її рівняння знайдемо у вигляді (2.44). Знайдемо координати правого фокуса еліпса: $c_\text{е} = \sqrt{a_\text{е}^2 - b_\text{е}^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$, $F_\text{е}(5{,}0)$. Отже, рівняння директриси параболи має вигляд: $x = 5$. Відомо, що $x = -\frac{p}{2}$, тому параметр параболи дорівнює $p = -10$. Остаточно маємо канонічне рівняння параболи $y^2 = -20x$.

Розділ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

3.1. ЗМІННІ ВЕЛИЧИНИ І ФУНКЦІЇ

3.1.1. Змінні та сталі величини

Визначення 3.1. ***Змінною величиною*** називається величина, яка набуває будь-яких значень.

Домовимось позначати змінні величини як $x, y, z, u, v, w, t, \ldots$

Визначення 3.2. ***Сталою величиною*** називається величина, значення якої не змінюється.

Домовимось позначати сталі величини як $a, b, c, d, k, \ldots$

Визначення 3.3. Величини, значення яких не змінюється за будь-яких обставин, називаються ***абсолютними сталими***. Наприклад, відношення довжини кола до діаметра є абсолютно сталою величиною: $\pi = 3{,}14159\ldots$

Визначення 3.4. Пряма лінія, на якій вказані початок, масштаб та напрям відрахування, називається ***числовою віссю***.

Важливо, що між множиною точок числової осі і множиною дійсних чисел є взаємно однозначна відповідність, а саме: будь-яка точка числової осі відображує певне дійсне число, і навпаки, будь-яке число є координатою певної точки числової осі.

Визначення 3.5. Сукупність всіх числових значень змінної величини називається її ***областю зміни***.

Визначимо наступні області зміни:

- ***інтервал (проміжок)*** – це сукупність всіх значень x, що розташовані між певними числами a і b $(a < b)$, при цьому самі числа a і b не належать вказаній сукупності: $a < x < b$ або $x \in (a, b)$;
- ***відрізок (сегмент)*** – це сукупність всіх значень x, що розташовані між певними числами a і b, при цьому самі числа a і b належать вказаній сукупності: $a \leq x \leq b$ або $x \in [a, b]$;
- ***полузамкнений інтервал*** - це сукупність всіх значень x, що розташовані між певними числами a і b, при цьому одно з чисел a або b належать вказаній сукупності: $a \leq x < b$ або $x \in [a, b)$; $a < x \leq b$ або $x \in (a, b]$;
- якщо змінна x набуває будь-яких значень, більших a (або менших b), такий інтервал називається ***напівнескінченним*** : $x > a$ або $x \in (a, \infty)$; $x < b$ або $x \in (-\infty, b)$;
- якщо змінна x набуває будь-яких дійсних значень, її областю змін буде ***нескінченний інтервал:*** $-\infty < x < \infty$ або $x \in (-\infty, \infty)$.

3.1.2. Функції. Основні визначення

Будь-який процес у природі може бути охарактеризований взаємною зміною декількох змінних величин. Визначення зв’язку між величинами, що беруть участь у процесі, який досліджується, є головною задачею природничих наук. Залежність значень змінних величин між собою описується функційною залежністю.

Нехай дано деяку множину значень змінної величини x (позначимо цю множину D). Якщо кожному значенню x із множини D по будь-якому правилу поставлено у відповідність значення іншої змінної величини y, то кажуть, що ця величина y є функція величини x, тобто x і y зв'язані між собою функційною залежністю.

Визначення 3.6. Величина y називається ***функцією*** змінної x в області D, якщо кожному значенню x з цієї області відповідає одно певне значення величини y. Змінна x називається ***незалежною змінною*** або ***аргументом*** функції. Значення функції y залежать від значення незалежної змінною, тому функцію називають також і ***залежною змінною***.

Позначати функцію будемо як $y = f(x)$.

Визначення 3.7. Сукупність значень x, для яких визначається значення функції y по правилу $f(x)$, називається ***областю визначення функції***: $D(f)$. Сукупність, що створена з різних значень y, які обчислюють за правилом $f(x)$ називається ***областю значення функції***: $E(f)$.

Визначення 3.8. Якщо змінні x і y розглядати як декартови координати точок на площині xOy, то ***графіком функції*** $y = f(x)$ називається множина точок координатної площини xOy с координатами $\left(x, f(x)\right)$.

Складна функція. Нехай $y = f(x)$ - деяка функція з областю визначення $D(f)$ і областю значень $E(f)$, а $z = g(y)$ - деяка функція, що задана на множині $E(f)$ або на деякій її підмножині з областю значень $E(g)$.

Визначення 3.9. Відповідність, яка надає кожному даному значенню x з множини $D(f)$ єдине число y з множини $E(f)$, а числу y - єдине число z з множини $E(g)$, називається ***складною функцією***: $z = g\left(f(x)\right)$. Більшість функцій, які ми будемо досліджувати – складні, при чому операція «функція від функції» може виконуватися будь-яке число разів. Наприклад,

$y = log_3\left(\sqrt[5]{x^4-3}+8\right)$, де $u = x^4 - 3,\ v = \sqrt[5]{u},\ w = v + 8,\ y = log_3 w.$

Обернена функція. Нехай $y = f(x)$ - деяка функція з областю визначення $D(f)$ і областю значень $E(f)$. Для будь-якого y_0 з множини $E(f)$ обов'язково знайдеться хоча б одне значення $x = x_0$ з множини $D(f)$ таке, що $f(x_0) = y_0$. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна, то для кожного x_0 з множини $D(f)$ знайдеться єдине значення y_0 з множини $E(f)$ таке, що $f(x_0) = y_0$.

Визначення 3.10. Відповідність, яка надає кожному даному числу y_0 з множини $E(f)$ єдине число x_0 з множини $D(f)$, називається ***оберненою функцію*** f^{-1} до функції f: $x = f^{-1}(y)$.

3.1.3. Способи задання функції

З приведених в п. 3.1.2. визначень прямує, що задати функцію означає з'ясувати її область визначення та правило, за яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність певне значення функції. Розглянемо наступні способи задання функції: табличний, графічний, аналітичний.

1. ***Табличний спосіб***. До табличного способу задання часто звертаються у науці та техніці. Данні спостережень у певному порядку заносять до таблиці. При такому способі задання виписуються послідовно значення незалежної змінної та відповідні їм значення функції. Нам добре відомі таблиці значень тригонометричних функцій, таблиці теплоємності речовин і т.п.

Наприклад, в таблиці 3.1 наведено функціональну залежність пасажиропотоку від часу доби на ділянці автобусного маршруту між пунктами A і B.

Таблиця 3.1.

Час	6.00	8.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00	20.00	22.00
Кількість пасажирів	458	624	322	167	153	388	477	298	164

Перевагою табличного способу задання функції є те, що для кожного наведеного значення аргументу можна знайти відповідне значення функції без обчислень і вимірювань. *Недоліками* цього способу є те, що неможливо задати функцію повністю, тобто для будь-яких значень аргументів, а також відсутність наочності при великих розмірах таблиці; при табличному заданні важко з'ясувати характер залежності функції від аргументу. До табличного способу задання неможна застосувати апарат математичного аналізу.

2. ***Графічний спосіб***. Якщо взяти за абсцису певне значення незалежного аргументу, тоді ордината буде відповідати значенню функції при даному значенні аргументу. Цю точку можна зобразити на координатній площині. Множина точок, абсциси яких є значеннями незалежних аргументів, а ординати – відповідними значеннями функції, утворюють графік функції (рис. 3.1). В деяких випадках графічний спосіб є єдиним способом задання функції, наприклад, при використанні самописців (приборів, які автоматично записують зміну однієї величини від зміни іншої).

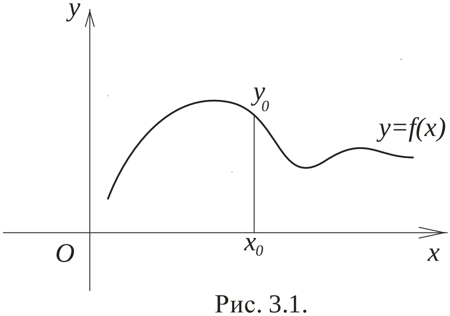


Рис. 3.1.

Перевагою графічного способу є наочність. А *недолік* – як і у табличному способі, до графіку не можна застосувати апарат математичного аналізу.

3. ***Аналітичний спосіб***. Функція задається формулою, за допомогою якої для будь-якого значення аргументу можна обчислити відповідне значення функції. Аналітичний спосіб є основним способом задання функції в математичному аналізі.

Перевагами аналітичного способу задання функції є компактність, можливість обчислити значення даної функції для будь-якого аргументу, можливість застосування апарату математичного аналізу. *Недоліками* аналітичного задання є недостатня наочність та необхідність обчислень.

Аналітичний спосіб задання можемо поділити на три типа:

а) ***явна форма задання***. Функцію задають у вигляді формули $y = f(x)$, що визначає операції і їх послідовність, які необхідно виконати над значенням аргументу для того, щоб обчислити значення функції. Наприклад,

$$y = 2^x - \sqrt{sin3x + 5};$$

б) ***неявна форма задання*** – це задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, яке задає її тоді і лише тоді, коли множина упорядкованих пар (x, y) є розв'язком цього рівняння. Наприклад,

$$x^3 arctgy - 6y + 5x^2 - 13 = 0;$$

в) ***параметрична форма задання***. Якщо функцію задано параметрично, то значення x і y, що відповідають одне одному, обчислюють через третю величину t, яку називають параметром: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Наприклад,

$$\begin{cases} x = 3e^t - 7t^2 \\ y = 5e^t + 2t^3 \end{cases}.$$

3.1.4. Основні характеристики поведінки функції

Вивчення будь якої функції полягає в з'ясуванні її поведінки. Апарат математичного аналізу дозволить нам навчитися проводити повне дослідження функції, а зараз згадаємо та узагальнимо відомі з елементарної математики простіші властивості функції.

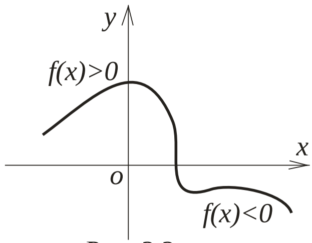


Рис. 3.2.

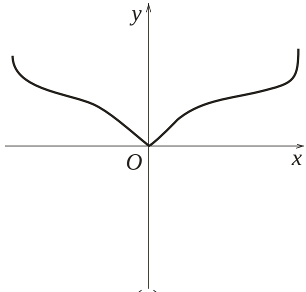
Визначення 3.11. Значення незалежного аргументу , при якому функція обертається в нуль, $f(x) = 0$, називається ***нулем*** функції.

Між нулями функції розташовані інтервали знакопостійності функції, тобто інтервали, де функція додатна - $f(x) > 0$ (графік функції розташований над віссю Ox), та інтервали, де функція від'ємна - $f(x) < 0$ (графік – під віссю Ox) (см. рис. 3.2).

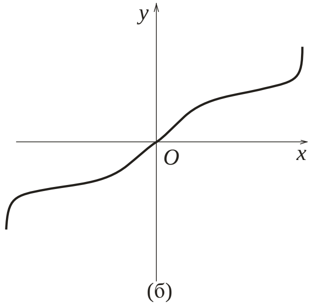
Визначення 3.12. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо при заміні знаку у будь-якого аргументу функції, значення самої функції залишається незмінним:

$$f(-x) = f(x).$$

Функція $y = f(x)$ називається



(а)



(б)

Рис. 3.3.

непарною, якщо при заміні знаку у будь-якого аргументу функції, значення самої функції теж змінює знак на протилежний, не змінюючи при цьому свого абсолютного значення:

$$f(-x) = -f(x).$$

Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 3.3, а), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 3.3, б).

Визначення 3.13. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує таке додатне число T, що для будь-якого x справедлива рівність $f(x + T) = f(x)$. Найменше додатне число T, для якого виконується ця умова, називається ***періодом*** функції (рис. 3.4).

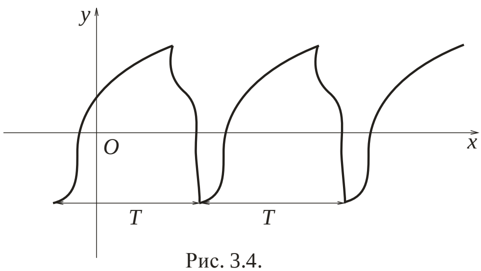


Рис. 3.4.

Визначення 3.14. Функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою*** на інтервалі (a, b), якщо більшим значенням аргументу відповідають більші значення функції. Тобто із умови $x_1 < x_2$ прямує $f(x_1) < f(x_2)$ для будь-яких x з інтервалу (a, b). Функція $y = f(x)$ називається ***спадаючою*** на інтервалі (a, b), якщо більшим значенням аргументу відповідають менші значення функції. Тобто із умови $x_1 < x_2$ прямує $f(x_1) > f(x_2)$ для будь-яких x з інтервалу (a, b).

Визначення 3.15. Інтервал незалежної змінної, в якому функція зростає, називається ***інтервалом зростання*** функції; інтервал незалежної змінної, в якому функція спадає, називається ***інтервалом спадання*** функції. Інтервали зростання і спадання функції називаються ***інтервалами монотонності***.

Функція може мати декілька інтервалів монотонності. Так, наприклад, на рис. 3.5 зображена функція, яка спадає на інтервалах $(a,\ x_1)$ і $(x_2,\ x_3)$, та зростає на інтервалах $(x_1,\ x_2)$ і $(x_3,\ b)$.

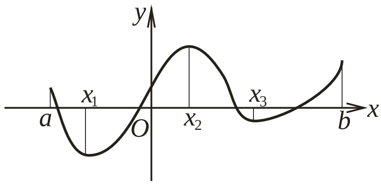


Рис. 3.5.

Визначення 3.16. Значення функції, більше (або менше) всіх інших значень функції в деякому інтервалі, називається ***найбільшим*** (або ***найменшим***) значенням функції в інтервалі.

Наприклад, на рис. 3.5 на інтервалі $(a,\ x_2)$ функція набуває найменшого значення в точці x_1, а на інтервалі $(x_1,\ x_3)$ - найбільшого значення в точці x_2.

3.2. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

3.2.1. Границя змінної величини. Теореми о границях

Визначення 3.16. Стале число a називається границею деякої числової послідовності дійсних чисел x_n, якщо, яким би не був окіл точки a, він включає всі члени вказаної послідовності, починаючи з деякого номера, тобто $|x_n - a| < \varepsilon$. Границю змінної будемо позначати як $x_n \to a$ або $\lim x_n = a$.

Приклад 3.1. Змінна величина послідовно набуває значення:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{4}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{8}, \ \ ..., \ \ x_n = 1 + \frac{1}{2^n}.$$

Доведемо, що змінна величина має границю, яка дорівнює одиниці.

Розв'язання: Обчислимо $|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| = \frac{1}{2^n}$. Бачимо, що для будь-якого наперед заданого малого додатного числа ε всі наступні значення змінної, починаючи з x_n, де $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, буде виконуватися нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$, що і треба було довести.

<u>Основні властивості змінних величин</u>

1. ***Границя константи дорівнює самій константі***.

Дійсно, якщо при будь-яких n $x_n = c$, то при будь-якому $\varepsilon > 0$ справедливо наступне $c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$. Ця умова буде виконуватися, починаючи з $n = 1$,тобто $x_n \to c$.

2. ***Змінна величина не може прямувати до двох різних границь***.

Якщо би так сталося, що $x_n \to a$ і $x_n \to b$ (рис. 3.6), то розглядаючи навколо a і b два проміжки, що не перетинаються, ми б побачили, що значення x_n опинилися одночасно в обох цих проміжках. Але це абсурдно, тому що ці проміжки не перетинаються, звідси прямує, що змінна може мати лише одну границю.

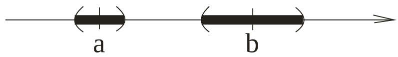


Рис. 3.6.

Зауваження: не треба думати, що кожна змінна обов’язково має границю. Наприклад, змінна $(-1)^n$ границі не має.

3. ***Теорема про стиснуту змінну (принцип двох міліціонерів)***.

Якщо $x_n \le y_n \le z_n$, $n = 1,2,...$ і $\lim x_n = \lim z_n = a$, то $\lim y_n = a$.

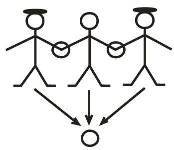


Рис. 3.7.

Тобто, якщо дві змінні прямують до однієї й тієї ж границі, а третя границя замкнена між ними, то вона теж прямує до тієї ж границі (рис. 3.7).

3.2.2. Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай незалежна змінна x нескінченно наближається до числа x_0. Так може статися, що відповідне значення функції $y = f(x)$ нескінченно наближається до деякого числа A. Тоді кажуть, що число A - границя функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$.

Визначення 3.17. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A. Границю функції позначають

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \tag{3.1}$$

Згідно з визначенням 3.17, число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого наперед узятого малого додатного числа ε можна підібрати таке ж мале число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності

$$|x - x_0| < \delta,$$

буде справедливою також нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

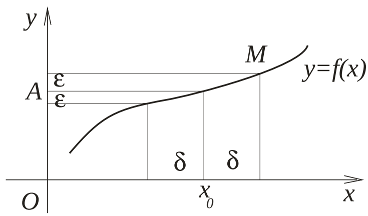


Рис. 3.8.

Графічно існування у функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ границі, яка дорівнює A, можна проілюструвати наступним чином (рис. 3.8). Проведемо перпендикуляри до координатних осей – в точці x_0 до осі Ox, в точці A до осі Oy - до їх перетину в точці M. Довільно оберемо додатне число ε, тоді знайдеться таке δ-окіл точки $x = x_0$, що частина графіка функції $y = f(x)$, що відповідає цьому околу, буде знаходиться в смузі, яка обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$.

Приклад 3.2. Довести, що границя функції $y = 4x + 5$ при $x \to 2$ дорівнює 13.

Розв'язання: Задаємо довільне додатне число $\varepsilon > 0$. Щоб була справедлива нерівність

$$|(4x + 5) - 13| < \varepsilon,$$

або (що те ж саме) $4|x - 2| < \varepsilon$,

необхідно, щоб виконувалася нерівність

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тобто, для будь-яких x, які відрізняються від 2 менше, ніж на $\frac{\varepsilon}{4}$, наша функція буде відрізнятися від 13 менше, ніж на ε, де ε - довільне додатне число.

Зауваження 1. Визначення границі не дає способів його знаходження! Надалі ми визначимо деякі правила, за якими будемо знаходити границі функцій.

Зауваження 2. Не треба думати, що кожна функція при будь-якому значенні аргументу обов'язково має границю.

Односторонні границі

Визначення 3.18. Число A називається ***лівою границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, де $\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх $x \in (a, x_0)$, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається ліва границя як

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

Аналогічно визначається ***права границя*** функції:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

Визначення 3.19. Ліва та права границі функції називаються односторонніми границями функції .

Якщо функція визначена на деякому інтервалі (a, b), крім, можливо, точки $x = x_0$, то для існування границі функції необхідно і достатньо, щоб ліва і права границі функції існували і дорівнювали один одному:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A. \tag{3.2}$$

Зауваження 3. В загальному випадку ліва і права границя можуть існувати, але не дорівнювати одне одному. Такі випадки ми детально розглянемо у наступних розділах.

3.2.3. Нескінченно малі і нескінченно великі величини та їх властивості

Визначення 3.20. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою*** величиною при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від x_0, відповідні значення функції за абсолютною величиною перебільшують будь-яке наперед задане яке завгодно велике додатне число:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty. \tag{3.3}$$

Тобто якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно великого додатного числа M можна підібрати таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, буде справедлива і нерівність $|f(x)| > M$, то $y = f(x)$ буде нескінченно великою величиною при $x \to x_0$.

Наприклад, функції $y = \frac{1}{x-2}$ при $x \to 2$; $y = \frac{5}{x^2}$ при $x \to 0$; $y = 4^x$ при $x \to \infty$ є нескінченно великими.

Зауваження 1. Не можна змішувати поняття дуже великого числа з нескінченно великою величиною! Наприклад, число $10^{10^{10^{10}}}$ є величиною колосальною, але є сталою величиною і не прямує до нескінченності.

Визначення 3.21. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою*** величиною при $x \to x_0$, якщо її границя при $x \to x_0$ прямує до нуля:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0. \tag{3.4}$$

Наприклад, функції $y = (x-2)^3$ при $x \to 2$;

$y = 4(x+3)$ при $x \to -3$; $y = 5^x$ при $x \to -\infty$ є нескінченно малими.

Зауваження 2. Не можна змішувати поняття дуже малого числа з нескінченно малою величиною! Єдине число, яке ми вважаємо нескінченно малою величиною є 0, тому що границя константи дорівнює самій константі.

Для з’ясування способів знаходження границь функції нам необхідно познайомитися з наступними теоремами.

Теорема. Якщо $f(x)$ - нескінченно велика величина, то $\frac{1}{f(x)}$ - нескінченно мала величина, і навпаки, якщо $\varphi(x)$– нескінченно мала величина, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ - нескінченно велика величина.

Доведення:

Нехай $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Оберемо будь-яке мале $\varepsilon > 0$ і візьмемо $M = \frac{1}{\varepsilon}$. За умовою теореми $f(x)$ – нескінченно велика величина, а тому для всіх x, близьких до x_0, буде виконуватися умова:

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Але в такому випадку буде справедливо і наступне:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

З цього випливає, що $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$. Тобто величина $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою. Що потрібно було довести.

Аналогічно доводиться і друга частина теореми.

<u>Пряма теорема</u>. Якщо функція має границю, то її можна представити у вигляді суми сталої, яка дорівнює її границі, і нескінченно малої величини.

Доведення:

Нехай $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Якщо ε - будь-яке додатне мале число, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всіх x, які мало відрізняються від x_0. З цього випливає, що різниця $f(x) - A$ є нескінченно малою величиною:

$$f(x) - A = \alpha(x) \text{ або } f(x) = A + \alpha(x).$$

<u>Обернена теорема</u>. Якщо функцію можна представити у вигляді суми сталої і нескінченно малої величини, то сталий доданок і є границею функції.

Доведення:

З рівності $f(x) = A + \alpha(x)$, де A - стала, а $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ - нескінченно мала, прямує, що якщо ε -будь-яке мале додатне число, то $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$ для всіх x, які мало відрізняються від x_0. Проте це означає, що функція $f(x)$ має своєю границею сталу величину A, тобто $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

3.2.4. Основні теореми про границі функції

Теорема 1. Границя алгебраїчної суми кінцевого числа доданків дорівнює сумі границь доданків:

$$\lim_{x\to x_0}(u_1+u_2+\dots+u_n)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}u_1+\lim_{x\to x_0}u_2+\dots+\lim_{x\to x_0}u_n \qquad (3.5)$$

Доведення:

Нехай $\lim_{x\to x_0}u_1=a_1$, $\lim_{x\to x_0}u_2=a_2$, …, $\lim_{x\to x_0}u_n=a_n$ тоді $u_1=a_1+\alpha_1$, $u_2=a_2+\alpha_2$, … , $u_n=a_n+\alpha_n$ де α_1, $\alpha_2, \dots$, α_n - нескінченно малі (за прямою теоремою п. 3.2.3). Тобто можна суму функцій представити у вигляді

$$u_1+u_2+\dots+u_n=(a_1+a_2+\dots+a_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n).$$

Тут $(a_1+a_2+\dots+a_n)$ - стала величина, а $(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)$ - нескінченно мала величина, тому

$$\lim_{x\to x_0}(u_1+u_2+\dots+u_n)=a_1+a_2+\dots+a_n=$$

$$=\lim_{x\to x_0}u_1+\lim_{x\to x_0}u_2+\dots+\lim_{x\to x_0}u_n.$$

Наслідок 1. Сума кінцевого числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала, тобто, якщо $u_1\to 0$ і $u_2\to 0$, то $u_1+u_2\to 0$.

Теорема 2. Границя добутку кінцевого числа множників дорівнює добутку границь множників:

$$\lim_{x\to x_0}(u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_n)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}u_1\cdot\lim_{x\to x_0}u_2\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0}u_n. \qquad (3.6)$$

Доведення: аналогічно теоремі 1.

<u>Наслідок 1</u>. Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot u = c \cdot \lim_{x \to x_0} u. \quad (3.7)$$

<u>Наслідок 2</u>. Добуток кінцевого числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

<u>Наслідок 3</u>. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно мала величина.

<u>Теорема 3</u>. Границя частки дорівнює частці цих границь, якщо границя знаменника відрізняється від нуля:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u}{\lim\limits_{x \to x_0} v}, \text{ якщо } \lim_{x \to x_0} v \neq 0. \quad (3.8)$$

Доведення: Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} u = a, \ \lim\limits_{x \to x_0} v = b \neq 0.$

Звідси $u = a + \alpha, \ v = b + \beta,$ де α і β - нескінченно малі величини. Запишемо і перетворимо тотожність:

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{ab+\alpha b - ab - a\beta}{b(b+\beta)} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Обчислимо границю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u}{v} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{a}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}\right).$$

в якій перший дріб – стала величина, а другий – нескінченно мала (з наслідку 3 до теореми 2). Тобто

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u}{\lim\limits_{x \to x_0} v}.$$

Приклад 3.3. Обчислити границю функції $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 7x^2 + 5x + 4}{6x^2 - 13}$.

Розв'язання: Скористаємося доведеними теоремами, маємо

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-7x^2+5x+4}{6x^2-13}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^3-7x^2+5x+4\right)}{\lim\limits_{x\to 3}(6x^2-13)}=$$

$$=\frac{2\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^3-7\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^2+5\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}4}{6\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^2-\lim\limits_{x\to 3}13}=\frac{2\cdot 3^3-7\cdot 3^2+5\cdot 3+4}{6\cdot 3^2-13}=\frac{10}{41}.$$

Зауважимо, що в даному прикладі ми обчислювали границю дрібно-раціональної функції, аргумент якої прямує до кінцевого значення, не обертаючи знаменник до нуля. Обчислення таких границь не викликає проблем, при розв'язанні ми користувалися лише визначенням границі і основними теоремами про границі.

3.2.5. Невизначеності. Розкриття деяких типів невизначеностей

Визначення 3.22. Дріб, в якому і чисельник, і знаменник є змінними величинами, які прямують до нуля, називається ***невизначеністю*** типу $\frac{0}{0}$. Знаходження границі такого дробу називається ***розкриттям невизначеності***.

Зауваження 1: Крім невизначеності $\frac{0}{0}$ є також невизначеності: $\frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0^{\infty}},\ 0^{0}$..

Зауваження 2: При обчисленні границь нам часто прийдеться працювати з нескінченно малими та нескінченно великими величинами. Спробуємо узагальнити вивченні поняття та властивості у таблиці 3.2. Відзначимо, що дії з нескінченно малими та нескінченно великими величинами мають умовний характер.

Таблиця 3.2.

$a \cdot 0 = 0$	$a \cdot \infty = \infty$
$\frac{0}{a} = 0$	$\frac{\infty}{a} = \infty$
$\frac{a}{0} = \infty$	$\frac{a}{\infty} = 0$

1. <u>***Невизначеність типу $\frac{0}{0}$, що задана відношенням двох многочленів.***</u>

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$, що задана у формі

$$\lim_{x\to a} \frac{Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + K}{Lx^m + Mx^{m-1} + \cdots + P},$$

необхідно і в чисельнику, і в знаменнику виділити критичний множник $(x-a)$ і скоротити дріб на нього.

Зауваження 1. Критичний множник $(x-a)$ обов'язково виділиться і в чисельнику, і в знаменнику, тому що $(x-a)$ є коренем обох многочленів, звідси прямує, що з наслідку теореми Бізу обидва многочлени можуть бути поділені на $(x-a)$ без залишку.

Зауваження 2. Можливо, що операцію скорочення на критичний множник прийдеться виконувати декілька разів.

Формули, що використовуються:

- розкладання квадратного тричлена на множники: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корні квадратного тричлена;
- формули скороченого множення:

а) різниця квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
б) сума (різниця) кубів:
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
в) квадрат суми (різниці):
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
г) куб суми (різниці):
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 2ab^2 \pm b^3$ і т.п.

Приклад 3.4. Обчислити границю функції $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x^3+8}$.

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. В чисельнику розкладемо квадратний тричлен на множники, а в знаменнику скористаємося формулою суми кубів:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x^3+8} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-3)}{(x^2-2x+4)} = -\frac{5}{12}.$$

2. <u>Невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням двох многочленів.</u>

Правило. Щоб розкрити невизначеність типа $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням двох многочленів, необхідно і чисельник, і знаменник скоротити на найбільшу степінь многочленів, що входить у функцію.

Приклад 3.5. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x^2-7x+4}{2x^3+3x-6}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь - x^3, скористаємося таблицею 3.2, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2-7x+4}{2x^3+3x-6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{2+\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}}=\frac{5}{2}.$$

Приклад 3.6. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^3+9}{x^3+8x^2-4x}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь - x^5, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^3+9}{x^3+8x^2-4x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^5}}{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{4}{x^5}}=\frac{3}{0}=\infty.$$

Приклад 3.7. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{5x^3-3x^2-12}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь - x^3, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{5x^3-3x^2-12}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^5}}{5-\frac{3}{x}-\frac{12}{x^3}}=\frac{0}{5}=0.$$

Якщо уважно проаналізувати розв'язання прикладів 3.5-3.7, можна відзначити цікаву закономірність: результат визначається співвідношенням максимальних степенів многочленів чисельника і знаменника. Узагальнимо ці спостереження у вигляді формули:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\dots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\dots+P}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{cases}\infty, & n>m\\ 0, & n<m\\ \frac{A}{L}, & n=m\end{cases} \qquad (3.9)$$

Зауваження. При обчисленні більш складних границь ми зможемо використовувати (3.9) не запобігаючи попередніх обчислень.

Приклад 3.8. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+6}+\sqrt[3]{5x^2-2}}{\sqrt[6]{x^8-3x^7-4}-6x}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Порівняємо максимальні степені в чисельнику $\left(n=\frac{7}{5}\right)$ і знаменнику $\left(m=\frac{4}{3}\right)$: $n>m$. За формулою (3.9) границя прямує до нескінченності.

3. <u>Невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\infty-\infty$, що задані ірраціональними виразами</u>

Правило. Щоб розкрити невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\infty-\infty$ у функціях, які мають ірраціональності, необхідно належним образом позбутися ірраціональності.

Формули, що використовуються: формули скороченого множення і, при необхідності, розкладання квадратного тричлена на множники (см. п.1).

Приклад 3.9. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+4}-3}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Чисельник розкладемо на множники, а щоб позбутися ірраціональності у знаменнику, скористаємося формулою різниці квадратів. Помножимо і чисельник, і знаменник на множник $\sqrt{x+4}+3$, звідси маємо

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+4}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{x+4-3^2}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to 5}(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)=4\cdot 6=24.$$

Приклад 3.10. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{2x+11}-3}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. В даній функції маємо ірраціональність і в чисельнику, і в знаменнику. Щоб позбутися ірраціональності і чисельник, і знаменник одночасно помножимо на $\left(\sqrt{x+5}+2\right)$ і $\left(\sqrt{2x+11}+3\right)$. Отже маємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{2x+11}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x+5}-2\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+11}-3\right)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+5-4)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{(2x+11-9)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{2(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{2\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=\frac{3}{4}.$$

Приклад 3.11. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right).$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\infty - \infty$. Для того щоб позбутися ірраціональності, скористаємося формулою різниці кубів, для цього помножимо і поділимо функцію на

$$\left(\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2} + \left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)^2\right),$$

виконавши ряд перетворень, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)}.$$

Порівняємо максимальні степені чисельника $(n = 1)$ і знаменника $\left(m = \frac{4}{3}\right)$, за формулою (3.9) отримуємо відповідь: границя прямує до нуля.

3.2.6. Важливі границі та їх застосування

<u>Перша важлива границя</u>

<u>Теорема.</u> Функція $\frac{sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$ має границю, яка дорівнює 1:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sin\alpha}{\alpha}=1. \qquad (3.10)$$

Доведення: Будемо виходити з геометричного визначення синуса (рис. 3.9). Беремо коло з одиничним радіусом і кут α в радіанах $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Функція $\frac{sin\alpha}{\alpha}$ - парна, а тому достатньо розглянути випадок, коли $\alpha>0$. З рис. 3.9 бачимо, що

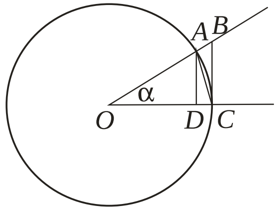


Рис. 3.9.

$$S_{\Delta OAC}<S_{\text{сектора}OAC}<S_{\Delta OBC}.$$

Площі обраних фігур наступні:

$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}OC\cdot AD=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot sin\alpha;$

$S_{\text{сектора}OAC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}\cdot R=\frac{1}{2}\alpha\cdot R\cdot R;$

$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}OC\cdot BC=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot tg\alpha.$

Тобто можна записати

$$\frac{1}{2}R\cdot R\cdot sin\alpha<\frac{1}{2}\alpha\cdot R\cdot R<\frac{1}{2}R\cdot R\cdot tg\alpha$$

з цього прямує, що $sin\alpha<\alpha<tg\alpha.$

Скоротимо всі члени нерівності на $sin\alpha>0$, отримаємо

$$1<\frac{\alpha}{sin\alpha}<\frac{1}{cos\alpha} \quad \text{або} \quad cos\alpha<\frac{sin\alpha}{\alpha}<1.$$

З геометричного визначення косинуса зрозуміло, що $\lim_{\alpha\to 0}cos\alpha=1,$

звідси з теореми про стиснуту змінну остаточно маємо

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Приклад 3.12. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot sinax}{a\cdot x}=a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{ax}=\begin{bmatrix}y=ax\\ y\to 0\end{bmatrix}=a\cdot 1=a.$$

Приклад 3.13. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot sinax}{x\cdot sinbx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinbx}=\frac{a}{b}.$$

Приклад 3.14. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot\frac{1}{cosax}=\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosax}=a\cdot 1=a.$$

Приклад 3.15. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\begin{bmatrix}x=siny\\ arcsinx=arcsin(siny)=y\\ y\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{siny}=1.$$

Приклад 3.16. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 5x-sin^2 x}{7x^2}.$$

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 5x-sin^2 x}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(sin5x-sinx)(sin5x+sinx)}{7x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2sin2xcos3x\cdot 2sin3xcos2x}{7x^2}=$$

$$=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}cos3x\cdot cos2x=$$

$$=\frac{4}{7}\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1=\frac{24}{7}.$$

Приклад 3.17. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx.$$

Розв'язання: Застосовувати першу важливу границю можна лише за умови, що аргумент функції прямує до нуля. Оберемо нову змінну, яка буде прямувати до нуля, зробимо відповідні перетворення

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx=|0\cdot\infty|=\begin{bmatrix}y=\frac{\pi}{2}-x\\ y\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{y\to 0}y\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\lim_{y\to 0}y\cdot ctgy=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot cosy}{siny}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{siny}\cdot\lim_{y\to 0}cosy=1\cdot 1=1.$$

Ми розглянули багато прикладів на застосування першої важливої границі і можемо зробити деякі висновки. По-перше, завдання на обчислення границі за допомогою першої важливої границі потребують від нас знання основних тригонометричних формул і вміння їх правильно застосовувати;

по-друге, наслідки першої важливої границі (деякі з них ми вже довели) можна застосовувати нарівні з самою теоремою.

<u>Наслідки першої чудової границі</u>:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$;
2) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1$;
3) $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$;
4) $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}=a$;
5) $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}=\frac{a}{b}$.

<u>Друга важлива границя</u>

<u>Теорема</u>. Функція $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ має границю при $n\to\infty$.

Доведення: За формулою бінома Ньютона маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}.$$

Перетворимо праву частину

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{(n-1)}{n}\right).$$

Бачимо, що функція $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ зростаюча при зростаючому n. Покажемо, що вона обмежена. Для цього замінимо в усіх членах праворуч виразу в дужках, одиницями, отримаємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Ще більше збільшимо праву частину, якщо замінимо

$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2\cdot3}$ на $\frac{1}{2\cdot2} = \frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{4!} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4}$ на $\frac{1}{2\cdot2\cdot2} = \frac{1}{2^3}$, …

$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}$ на $\frac{1}{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2} = \frac{1}{2^{n-1}}$,

звідси

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тим більше, дописавши в праву частину члени прогресії $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \cdots$,

отримаємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right).$$

У дужках отримали суму нескінченно спадаючої геометричної прогресії, яка дорівнює 2. Звідси маємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Якщо $n = 1$, ліва частина нашої формули дорівнює 2. Отже остаточно маємо

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Визначення 3.23. Числом e називається границя $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Воно приблизно дорівнює $e \approx 2{,}718$ ....

Виявляється, що функція має границю не лише тоді, коли іі аргумент приймає цілочислені значення, але й при неперервній його зміні та прямуванні до нескінченності.

Теорема. Функція $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ при $x\to\infty$ має границю, яка дорівнює e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{3.11}$$

Доведення цієї теореми виходить за межи вивчаємого курсу.

Зауваження. За допомогою другої важливої границі розкриваються невизначеності типу 1^{∞}.

Приклад 3.18. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}.$$

Розв'язання. Скористаємося другою важливою границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}=|1^{\infty}|=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{4}=e^{4}.$$

Приклад 3.19. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{5x}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{5x}=|1^{\infty}|=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{7}}\right)^{\frac{7}{x-2}\cdot 5x}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{35x}{x-2}}=e^{35}.$$

Приклад 3.20. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{6x-1}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{6x-1}=|1^{\infty}|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-3}{4x+5}-1\right)^{6x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-3-4x-5}{4x+5}\right)^{6x-1}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{4x+5}\right)^{\frac{4x+5}{-8}}\right)^{\frac{-8}{4x+5}\cdot(6x-1)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-8(6x-1)}{4x+5}}=e^{-12}.$$

Приклад 3.21. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)[ln(5x+2)-ln(5x-4)].$$

Розв'язання: Звернемо увагу, що в даному прикладі ми змушені позбавлятися невизначеності типу $|\infty-\infty|$. Як ми зауважили, що друга важлива границя допомагає позбавлятися невизначеності типу $|1^{\infty}|$. Але, згадав властивості логарифмів, нам вдасться звести дану границю до другої важливої границі.

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)[ln(5x+2)-ln(5x-4)]=|\infty-\infty|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(2x+3)ln\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right)=\lim_{x\to\infty}ln\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right)^{(2x+3)}=$$

$$=ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right)^{(2x+3)}=|1^{\infty}|=$$

$$=ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x+2}{5x-4}-1\right)^{(2x+3)}=$$

$$=ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{5x-4}\right)^{\frac{5x-4}{6}}\right)^{\frac{6}{5x-4}\cdot(2x+3)}=$$

$$=lne^{\lim_{x\to\infty}\frac{6(2x+3)}{5x-4}}=lne^{\frac{12}{5}}=\frac{12}{5}lne=\frac{12}{5}.$$

Приклад 3.22. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{7x+6}\right)^{11x-3}.$$

Розв'язання: Ми розглянули вже достатньо прикладів, щоб навчитися обчислювати границі за допомогою другої важливої границі, і найпоширеніша помилка, яку допускають при обчисленні таких границь, є помилка, коли побачивши знайому структуру, починають слідувати за вже знайомим алгоритмом, не перевіривши, чи є тут невизначеність. В даної границі невизначеності нема, і ми відповідь отримуємо миттєво:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{7x+6}\right)^{11x-3}=\left(\frac{5}{7}\right)^{\infty}=0.$$

<u>Три важливі границі</u>

<u>Теорема 1</u>. Справедлива формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1. \tag{3.12}$$

Доведення: З другої важливої границі маємо, що $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ при $z\to 0$ прямує до e, отже маємо

$$\frac{ln(1+x)}{x}=ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ \xrightarrow{\text{при } x\to 0}\ lne=1.$$

Що і треба було довести.

<u>Теорема 2</u>. Справедлива формула

$$\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=lna. \tag{3.13}$$

Доведення: Якщо $u\to 0$, то величина $a^u-1\to 0$, тобто в чисельнику величина нескінченно мала. Нехай $a^u-1=z$

З теореми 1 прямує, що $z \sim ln(1+z)$ тобто

$a^u - 1 \sim ln[1+(a^u-1)] = lna^u = u \cdot lna,$ з цього прямує, що

$$\lim_{u\to 0} \frac{a^u-1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{u \cdot lna}{u} = lna.$$

Що і треба було довести.

<u>Теорема 3</u>. Справедлива формула

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^a-1}{u} = a. \tag{3.14}$$

Доведення: Величина $(1+u)^a - 1$ при $u \to 0$ прямує до нуля, тобто є величиною нескінченно малою. Як і при доведенні теореми 2 положимо $(1+u)^a - 1 = z$.

З цього прямує $z \sim ln(1+z)$, тобто

$$(1+u)^a - 1 \quad \sim$$

$$\sim \quad ln\big[1+[(1+u)^a-1]\big] = ln(1+u)^a = a \cdot ln(1+u).$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^a-1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{a \cdot ln(1+u)}{u} = a.$$

Що і треба було довести.

Приклад 3.23. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+7x)}{4x}.$$

Розв'язання: Скористаємося т. 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+7x)}{4x} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{7ln(1+7x)}{7x} = \frac{7}{4}.$$

Приклад 3.24. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{15^x-5^x}{x}.$$

Розв'язання: Скористаємося т. 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{15^x-5^x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{15^x-1}{x}-\frac{5^x-1}{x}\right)=ln15-ln5=$$

$$=ln\frac{15}{5}=ln3.$$

Приклад 3.25. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{3x}.$$

Розв'язання: Скористаємося т. 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{7}}-1}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{21}.$$

3.2.7. Порівняння нескінченно малих

Нехай декілька нескінченно малих величин α,β,γ ... є функціями одного ж того ж самого аргументу x и прямують до нуля при $x\to a$ (або $x\to\infty$).

Визначення 3.23. Якщо відношення α і β має кінцеву і відмінну від нуля границю при $x\to a$, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0,\quad \text{а}\quad \lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{A}\neq 0,$$

То $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі одного порядку малості.

Приклад 3.26. Нехай $\alpha(x)=1-cos^3x$, $\beta(x)=x\cdot sin5x$, де $x\to 0$ - нескінченно малі. Обчислимо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{x\cdot sin5x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)(1+cosx+cos^2x)}{x\cdot sin5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x\cdot sin5x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+cosx+cos^2x)=$$

$= 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x \cdot sin5x} = 6 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2}}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{2}}{sin5x} =.$

$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{5} = \frac{3}{10}.$

Згідно з визначенням 3.23 нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку.

Визначення 3.24. Якщо $\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, а $\lim_{x\to a} \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, то нескінченно мала α вищого порядку, ніж нескінченно мала β; а нескінченно мала β нижчого порядку малості, ніж нескінченно мала α при $x \to a$.

Приклад 3.27. Нехай $\alpha(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$, $\beta(x) = \frac{x^2+1}{x^4}$, де $x \to \infty$ - нескінченно малі. Обчислимо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^4}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4(x^2-1)}{x^3(x^2+1)} = \infty.$$

Згідно з визначенням 3.24 нескінченно мала $\alpha(x)$ - нижчого порядку, ніж $\beta(x)$.

Визначення 3.25. Нескінченно мала β називається нескінченно малою k-го порядку відносно нескінченно малої α, якщо β і α^k - нескінченно малі одного порядку при $x \to a$, тобто якщо

$$\lim_{x\to a} \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0.$$

Приклад 3.28. З'ясувати порядок відносно x функції $\beta(x) = \frac{3x^5}{x^3+1}$, нескінченно малої при $x \to 0$.

Розв'язання: Порівнюючи степені x, положимо $k = 2$. Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{\alpha^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x^5}{x^3+1}}{x^2}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^5+x^3}=3.$$

Звідси маємо, що нескінченно мала $\beta(x)$ є нескінченно малою 2-го порядку відносно нескінченно малої x (за визначенням 3.25).

Визначення 3.26. Якщо відношення двох нескінченно малих α і β прямує до 1 при $x\to a$, тобто якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1.$$

то нескінченно малі α і β називаються еквівалентними і позначаються: $\alpha\sim\beta$.

Приклад 3.29. Нехай $\alpha(x)=\frac{1-x}{1+x}$, $\beta(x)=1-\sqrt{x}$, де $x\to 1$ - нескінченно малі. Обчислимо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x})=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

За визначенням 3.26 ці нескінченно малі еквівалентні.

Зауваження 1. Якщо відношення двох нескінченно малих α і β не має границі при $x\to a$ і не прямує до нескінченності, то нескінченно малі α і β не порівняні між собою.

Приклад 3.30. Нехай $\alpha(x)=x$ і $\beta(x)=x\cdot sin\left(\frac{3}{x}\right)$ при $x\to 0$ α і β є нескінченно малими, але їх відношенням не має границі, тому що $\left|sin\left(\frac{3}{x}\right)\right|\le 1$ не має границі. Звідси прямує, що ці нескінченно малі не порівняні між собою.

Зауваження 2. Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі.

Приклад 3.31. Нехай $\alpha(x) = 7x^4 + 4x$ і $\beta(x) = x^4 - 5x^3 + 12$ - нескінченно великі при $x \to \infty$. Знайдемо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^4 + 4x}{x^4 - 5x^3 + 12} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 7$$

Звідси прямує, що ці нескінченно великі – одного порядку величкості.

Порівняння нескінченно малих має практичне застосування. Поняття еквівалентних нескінченно малих ми застосуємо при обчисленні границь функцій.

Принцип заміни нескінченно малих

При розкритті невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ можна і чисельник, і знаменник замінити еквівалентними їм величинами.

З розглянутих важливих границь та їх наслідків, маємо еквівалентні функції, використання яких значно полегшує обчислення границь:

$sinx \sim x$; $tgx \sim x$;

$arcsinx \sim x$; $arctgx \sim x$;

$ln(1 + x) \sim x$; $e^x - 1 \sim x$.

Приклад 3.32. Знайти границю функції $\lim_{x\to0} \frac{arctg7x}{e^{3x-1}}$.

Розв'язання: Скористаємося еквівалентними нескінченно малими

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg7x}{e^{3x}-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\begin{bmatrix} arctg7x\sim 7x \\ e^{3x}-1\sim 3x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}.$$

3.2.8. Неперервність функцій. Властивості неперервних функцій

Визначення 3.27. ***Приростом функції*** $y=f(x)$ в даній точці x_0 називається різниця $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, де Δx - ***приріст аргументу*** (рис. 3.10).

Визначення 3.28. Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною у точці*** x_0, якщо ця функція визначена у деякому околі точки x_0, і якщо виконується умова: $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

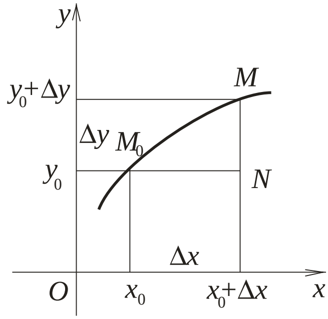


Рис. 3.10.

Приклад 3.33. Перевірити чи є функція $y=2^x$ неперервною у будь якій точці x_0.

Розв'язання: Знайдемо приріст функції Δy:

$$\Delta y=2^{x_0+\Delta x}-2^{x_0}=2^{x_0}\cdot 2^{\Delta x}-2^{x_0}=2^{x_0}\left(2^{\Delta x}-1\right).$$

Отже при $\Delta x\to 0,\ \ 2^{\Delta x}\to 1,\ \Delta y\to 0$, тобто функція неперервна.

Скористаємося визначеннями 3.27, 3.28 і дамо ще одне визначення неперервності функції в точці. Для цього приріст функції Δy перепишемо як

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

або $\quad \lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0).$

Якщо ввести позначення $x_0+\Delta x=x$, то $x\to x_0$ (при $\Delta x\to 0$) і остаточно маємо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (3.15)$$

Визначення 3.29. Функція $y = f(x)$ ***неперервна в точці*** x_0, якщо вона визначена в будь-якому околі цієї точки, і якщо границя функції існує і дорівнює значенню функції при $x = x_0$ (за умовою, що незалежна змінна x прямує до x_0).

Визначення 3.30. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в інтервалі***, якщо вона неперервна у будь-якій точці інтервалу.

Для кінців інтервалу визначення неперервності в точці треба уточнити: для лівого кінця Δx треба брати додатнім, а для правого – від'ємним.

Зауваження 1. Графік неперервної функції можна нарисувати, не відриваючи олівця.

Зауваження 2. Всі основні елементарні функції неперервні в своїх областях визначення.

Однобічна неперервність

Визначення 3.31. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;x_0]$. Кажуть, що функція $y = f(x)$ ***неперервна в точці $\boldsymbol{x_0}$ ліворуч***, якщо

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0). \qquad (3.16)$$

Визначення 3.32. Нехай $y = f(x)$ визначена на інтервалі $[x_0; b)$. Кажуть, що функція $y = f(x)$ ***неперервна в точці $\boldsymbol{x_0}$ праворуч***, якщо

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (3.17)$$

Якщо функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і точка x_0 належить цьому інтервалу, то для неперервності функції в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб функція $y=f(x)$ була неперервна ліворуч і праворуч від точки x_0:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x). \qquad (3.18)$$

Якщо умови (3.16), (3.17) не виконуються, то функція $y=f(x)$ розривна у точці x_0, а точка x_0 називається ***точкою розриву функції***.

Класифікація розривів

Визначення 3.33. Якщо функція $y=f(x)$ не визначена в точці x_0 або має стрибок кінцевої величини, то кажуть, що в точці x_0 функція $y=f(x)$ має ***розрив першого роду***. Тобто, точкою розриву функції $y=f(x)$ першого роду називається така точка x_0, в якій функція має ліву та праву границю, не рівні між собою (рис. 3.11):

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x). \qquad (3.19)$$

Визначення 3.34. Якщо функція $y=f(x)$ в точці x_0 не має хоча в однієї з однобічніх границь, або вона дорівнює $\pm\infty$, то кажуть, в функція $y=f(x)$ має в точці x_0 ***розрив другого роду*** (рис. 3.12).

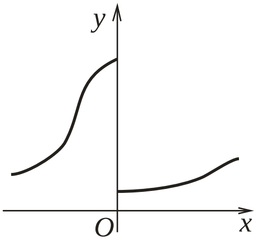


Рис. 3.11.

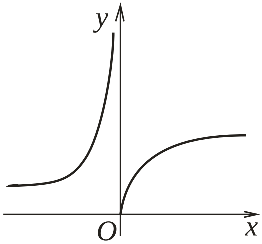


Рис. 3.12.

Зауваження. У випадках і розриву першого роду, і розриву другого роду, точка x_0 може належати або не належати області визначення функції.

Приклад 3.34. Перевірити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ 5x - 6, & x > 2 \end{cases}$$

Розв'язання:

Побудуємо графік функції (рис. 3.13):

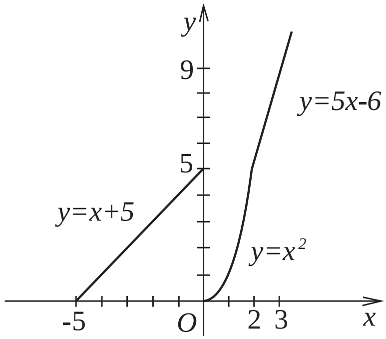


Рис. 3.13.

Функція задана трьома елементарними функціями, неперервними у своїх областях визначення, тому, якщо вона і має розриви, то лише у точках $x = 0$ і $x = 2$. Дослідимо на неперервність функції у точках:

$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}(x + 5) = 5;$

$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x^2 = 0;$

$\lim_{x\to 0-0} f(x) \neq \lim_{x\to 0+0} f(x);$

$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} x^2 = 4;$

$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(5x - 6) = 4;$

$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} f(x).$

Отже, у точці $x = 2$ функція неперервна, а у точці $x = 0$ має розрив першого роду.

Приклад 3.35. Перевірити на неперервність функцію $f(x) = 5^{\frac{7}{x-4}}$ в точці y = 4.

Розв'язання: Обчислимо ліву та праву границю функції у точці $x = 4$:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0} 5^{\frac{7}{x-4}} = 5^{-\frac{7}{0}} = 5^{-\infty} = 0;$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0} 5^{\frac{7}{x-4}} = 5^{\frac{7}{0}} = 5^{\infty} = \infty.$$

Отже, права границя функція у точці $x = 4$ дорівнює нескінченності, а тому вона має в ній розрив другого роду.

<u>Деякі властивості неперервних функцій</u>

<u>Теорема 1</u>. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $x \in [a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x = x_1$ така, що значення функції у цій точці буде задовольняти нерівності $f(x_1) \geq f(x)$, і знайдеться хоча б одна точка $x = x_2$ така, що значення функції у цій точці буде задовольняти нерівності $f(x_2) \leq f(x)$.

Тут $f(x_1) = M$ - найбільше, а $f(x_2) = m$ - найменше значення функції $y = f(x)$ на інтервалі $[a; b]$ (рис. 3.14).

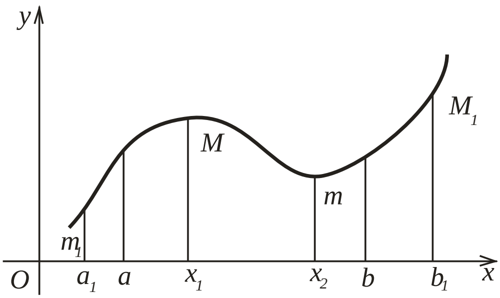


Рис. 3.14.

Зауваження. Твердження теореми може бути невірним, якщо розглядати функцію $y = f(x)$ на незамкненому інтервалі $(a; b)$.

Теорема 2. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі $x \in [a; b]$ і на кінцях інтервалу має значення різних знаків, тоді між точками a і b знайдеться хоча б одна точка $x = c$, у якій функція дорівнює нулю: $f(c) = 0$, $a < c < b$ (рис. 3.15).

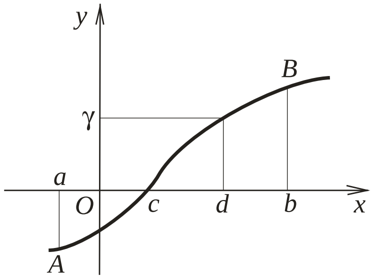


Рис. 3.15.

Теорема 3. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $x \in [a; b]$. Якщо на кінцях цього відрізку значення функції відрізняються $f(a) = A$ і $f(b) = B$, то яке б не було число γ, яке розташоване між числами A і B, знайдеться така точка $x = d$, яка розташована між a і b, що $f(d) = \gamma$.

На рис. 3.15 будь-яка пряма $y = \gamma$ перетинає графік.

Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ

4.1.1. Поняття похідної як швидкості зміни функції

Нехай дано функцію $y = f(x)$. Знайдемо швидкість зміни функції на інтервалі $(x, x + \Delta x)$. Для цього по приросту аргументу Δx знайдемо приріст функції Δy і розглянемо їх відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Визначення 4.1. Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ називається середньою швидкістю $V_{\text{сер.}}$ зміни функції на інтервалі $(x, x + \Delta x)$.

Зрозуміло, що чим менший інтервал, тим краще середня швидкість характеризує зміну функцію,тому примушуємо приріст аргументу прямувати до нуля: $\Delta x \to 0$.

Визначення 4.2. Швидкістю зміни функції в даній точці x називається границя середньої швидкості зміни функції на інтервалі $(x, x + \Delta x)$ при прямуванні Δx до нуля:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Отже, швидкість зміни функції $y = f(x)$ визначається послідовним виконанням наступних дій:

1) По приросту Δx, яке надається даному значенню незалежної змінної x, знаходиться відповідний приріст функції
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$
2) Складається відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
3) Знаходиться границя цього відношення (якщо вона існує) при довільному прямуванні Δx до нуля.

4.1.2. Визначення похідної

Визначення 4.3. ***Похідною*** даної функції називається границя відношення приросту функції до приросту незалежної змінної при довільному прямуванні цього приросту до нуля, якщо така границя існує:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Поняття похідної – одне з фундаментальних понять в математичному аналізі. Один з засновників аналізу І. Ньютон прийшов до поняття похідної, розв'язуючи питання при швидкість руху. $f'(x)$ - читаємо «еф штрих від ікс».

Користуючись визначенням похідної, можна сказати, що:

1) швидкість прямолінійного руху є похідна від закону руху $S = F(t)$ по часу t;
2) лінійна щільність є похідна від маси $m = \phi(s)$ по довжині s;
3) теплоємність є похідна від кількості тепла $q = \psi(\tau)$ по температурі τ;
4) швидкість хімічної реакції є похідна від кількості речовини $\gamma = F(t)$ по часу t.

4.1.3. Техніка диференціювання елементарних функцій

1. <u>*Похідна константи*</u>. Нехай $y = C$.
   При значенні незалежної змінної x функція дорівнює $y = C$. Новому значенню аргументу $x + \Delta x$ відповідає значення функції $y + \Delta y = C$. Але звідси $\Delta y = 0$ і $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Отже $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.
   $$\boxed{C' = 0}. \qquad (4.2)$$

2. *Похідна незалежної змінної*. Нехай $y = x$,тоді $y + \Delta y = x + \Delta x$. Звідси $\Delta y = \Delta x$ і $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, тому і $y' = 1$.

$$\boxed{x' = 1}. \tag{4.3}$$

3. *Похідна степеневої функції*. Нехай $y = x^n$.

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = \left[x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]^n = x^n\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n$.

Тоді $\Delta y = x^n\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - x^n = x^n\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]$.

Складемо відношення

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]}{\Delta x} = \frac{\frac{x^n}{x}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{n-1}\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]}{\frac{\Delta x}{x}}$.

Положимо $\frac{\Delta x}{x} = u$ і згадаємо «важливу границю» $\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^a - 1}{u} = a$, маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1}\cdot n$$

або

$$\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1}}. \tag{4.4}$$

4.1.4. Основні правила диференціювання

1. **Похідна суми.**

Теорема 1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі похідних доданків.

Доведення:

Нехай $y = u + v$.

Нове значення аргументу $x + \Delta x$, при цьому набуває приросту і u, і v: $u + \Delta u,\ v + \Delta v$, звідси $y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$.

Віднімаючи, знаходимо $\Delta y = \Delta u + \Delta v$.

Звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Спрямуємо $\Delta x \to 0$. За визначенням похідної маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Звідси $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u' + v'$,

або

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'} \tag{4.5}$$

Приклад 4.1. Знайти похідну функції $y = x^5 - x^3 + 6$.

Розв'язання: $y' = 5 \cdot x^{5-1} - 3 \cdot x^{3-1} + 0 = 5x^4 - 3x^2$.

2. **Похідна добутку.**

Теорема 2. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу і похідної другої функції на першу.

Доведення:

Нехай $y = u \cdot v$.

$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = u \cdot v + \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$.

Приріст функції дорівнює $\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$.

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

при $\Delta x \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v' + u' \cdot 0.$$

Отже остаточно маємо

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} \qquad (4.6)$$

Приклад 4.2. Знайти похідну функції

$$y = (x^4 - x^2 + 7) \cdot \left(3 + \sqrt[5]{x^8}\right).$$

Розв'язання: $u = x^4 - x^2 + 7; \quad v = 3 + \sqrt[5]{x^8} = 3 + x^{\frac{8}{5}};$

$u' = 4x^3 - 2x; \quad v' = \frac{8}{5} x^{\frac{3}{5}} = \frac{8}{5} \sqrt[5]{x^3}.$

$$y' = (4x^3 - 2x) \cdot \left(3 + \sqrt[5]{x^8}\right) + (x^4 - x^2 + 7) \cdot \frac{8}{5} \sqrt[5]{x^3}.$$

3. Винесення постійного множника за знак похідної.

Нехай $y = C \cdot u$. За теоремою 2 маємо $y' = C' \cdot u + C \cdot u'$. Так як $C' = 0$, то маємо $y' = C \cdot u'$ або

$$\boxed{(C \cdot u)' = C \cdot u'}. \qquad (4.7)$$

Наслідок. Справедлива формула

$$\boxed{\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}}. \qquad (4.8)$$

Доведення: Розглянемо функцію $y = \frac{u}{C}$. Винесемо константу за знак похідної: $y' = \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} u' = \frac{u'}{C}$.

Приклад 4.3. Знайти похідну функції

$$y = 8x^9 - 5\sqrt{x} + 13.$$

Розв'язання:

$$y' = 8 \cdot 9x^8 - 5 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 72 - \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

4. **Похідна частки.**

<u>Теорема 3</u>. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, знаменник якого дорівнює квадрату дільника, а чисельник – різниці між добутком похідної діленого на дільник і добутком діленого на похідну дільника.

Нехай $y = \frac{u}{v}$, тоді $y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$.

Приріст функції дорівнює

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u+\Delta u)v - u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v} = \frac{uv+\Delta uv-uv-u\Delta v}{(v+\Delta v)v} = \frac{\Delta uv-u\Delta v}{(v+\Delta v)v}.$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}.$$

при $\Delta x \to 0$ (так як $\Delta v \to 0$) отримаємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Отже остаточно маємо

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}. \qquad (4.9)$$

Наслідок. Справедлива формула

$$\boxed{\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v\prime}{v^2}}. \qquad (4.10)$$

Доведення: Розглянемо функцію $y = \frac{C}{v}$. За теоремою 3 маємо $y' = \frac{C'v - Cv\prime}{v^2}$. Так як $C' = 0$, остаточно маємо $y' = -\frac{C \cdot v\prime}{v^2}$.

Приклад 4.4. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2-4x+2}{3x^2+4}$.

Розв'язання: $u = x^2 - 4x + 2$; $v = 3x^2 + 4$; $u' = 2x - 4$; $v' = 6x$.

$$y' = \frac{(2x-4)\cdot(3x^2+4) - (x^2-4x+2)\cdot 6x}{(3x^2+4)^2} = \frac{6x^3 - 12x^2 + 8x - 16 - 6x^3 + 24x^2 - 12x}{(3x^2+4)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 - 4x - 16}{(3x^2+4)^2}.$$

4.1.5. Похідна складної функції

Теорема. Похідна складної функції дорівнює похідної даної функції по проміжному аргументу, помноженої на похідну цього аргументу по незалежній змінній.

Доведення:

Нехай $y = f(u),\ u = \varphi(x)$. Доведемо, що

$$y' = f'(u) \cdot u' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f_u' \cdot u_x'.$$

Дамо аргументу x приріст Δx; цей приріст спричиняє приріст проміжного аргументу Δu, яке зумовить зміну функції y на Δy. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Обчислимо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так як $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'_u$ і $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$, то

$$\boxed{y'=f'_u\cdot u'_x} \tag{4.11}$$

Приклад 4.5. Знайти похідну функції $y=(7x^5-12)^6$

Розв'язання: Тут проміжний аргумент $u=7x^5-12$, $y=u^6$, отже $f'_u=6u^5$, $u'_x=35x^4$:

$$y'=f'_u\cdot u'_x=6u^5\cdot 35x^4=6(7x^5-12)^5\cdot 35x^4.$$

Зауваження: Припустимо тепер, що функція $y=f(x)$ може бути представлена ланцюгом, що складається не з двох, а з трьох функцій:

$$y=f(u),\ \ u=\varphi(v),\ \ \ v=\psi(x).$$

Згідно з теоремою маємо $y'=f'_u\cdot u'$.

де u' - похідна від u, яка в свою чергу є функцією від незалежної змінної. За тією ж теоремою маємо $u'=\varphi'_v\cdot v'=\varphi'_v\cdot\psi'_x$.

Отже, похідна даної функції знаходиться за правилом:

$$y'=f'_u\cdot\varphi'_v\cdot\psi'_x.$$

Саме так знаходимо формулу при будь-якої кінцевої кількості проміжних аргументів. А тому можна сформулювати правило:

Похідна складної функції дорівнює добутку похідних від функцій, що її складають.

Приклад 4.6. Знайти похідну функції

$$y=\left(15-\sqrt[3]{2x^7-3}\right)^{11}.$$

Розв'язання: Представимо цю функцію у вигляді ланцюжка $y = u^{11}$,

$u = 15 - \sqrt[3]{v}, \quad v = 2x^7 - 3$, отримаємо

$$y' = (u^{11})' \cdot \left(15 - \sqrt[3]{v}\right)' \cdot (2x^7 - 3)' = 11u^{10} \cdot \frac{1}{3} v^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot 7x^6 =$$

$$= \frac{154}{3}\left(15 - \sqrt[3]{2x^7 - 3}\right)^{10} \cdot \frac{x^6}{\sqrt[3]{(2x^7-3)^2}}.$$

Надалі ми ще не раз звернемося к диференціюванню складних функцій.

4.1.6. Похідні обернених функцій

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ - пара взаємно обернених функцій. Нам відома похідна $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і вона не дорівнює нулю.

Так як $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$, то з тотожності $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ отримаємо

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

тобто

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Отже, можемо сформулювати правило:

Похідні від взаємно обернених функцій обернені за величиною:

$$\boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}}, \quad \boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}. \tag{4.12}$$

Приклад 4.7. Знайти похідну функції $y = \sqrt[5]{x}$.

Розв'язання: Функція $x = y^5$ обернена заданій і $x'_y = 5y^4$. Отже,

$$y'_x = \frac{1}{5y^4} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

4.1.7. Таблиця похідних

Похідні тригонометричних функцій.

1. <u>*Похідна синуса*</u>. <u>$y = sinx$</u> .

$y + \Delta y = sin(x + \Delta x)$. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y = sin(x + \Delta x) - sinx = 2sin\frac{\Delta x}{2}cos\frac{2x+\Delta x}{2}.$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Скористаємося першою чудовою границею $\lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$.

Остаточно маємо $y' = \lim_{x\to 0}\left[\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = cosx$.

$$\boxed{(sinx)' = cosx} \tag{4.13}$$

2. <u>*Похідна косинуса*</u>. <u>$y = cosx$</u> .

$y + \Delta y = cos(x + \Delta x)$. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y = cos(x + \Delta x) - cosx = -2sin\frac{\Delta x}{2}sin\frac{2x+\Delta x}{2}.$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Скористаємося першою чудовою границею $\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$.

Остаточно маємо $y' = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = -sinx$.

$$\boxed{(cosx)' = -sinx}. \qquad (4.14)$$

3. *Похідна тангенса*.

Нехай $y = tgx$.

Скористаємося формулою похідна частки:

$$y' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'\cdot cosx - sinx\cdot(cosx)'}{(cosx)^2} = \frac{cosx\cdot cosx + sinx\cdot sinx}{(cosx)^2} =$$

$$= \frac{1}{(cosx)^2}.$$

Отже, маємо

$$\boxed{(tgx)' = \frac{1}{(cosx)^2}} \qquad (4.15)$$

4. *Похідна котангенса*. $y = ctgx$.

Скористаємося формулою похідної частки

$$y' = \left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(cosx)'\cdot sinx - cosx\cdot(sinx)'}{(sinx)^2} = \frac{-sinx\cdot sinx - cosx\cdot cosx}{(sinx)^2} =$$

$$= -\frac{1}{(sinx)^2}.$$

Отже, маємо

$$\boxed{(ctgx)' = -\frac{1}{(sinx)^2}} \qquad (4.16)$$

Похідна показникової функції. $\underline{y = a^x}$.

$y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x \cdot a^{\Delta x}$. Приріст функції дорівнює

$$\Delta y = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$.

Спрямуємо $\Delta x \to 0$ і згадаємо «важливу границю» $\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = lna$, отримаємо

$$y' = a^x \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \cdot lna.$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot lna}. \qquad (4.17)$$

Якщо $a = e,\ lne = 1$, то

$$\boxed{(e^x)' = e^x}. \qquad (4.18)$$

Похідна логарифмічної функції.

1) $\underline{y = lnx}$.

$y + \Delta y = ln(x + \Delta x)$. Приріст функції дорівнює

$$\Delta y = ln(x + \Delta x) - lnx = ln\frac{x+\Delta x}{x} = ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$.

Спрямуємо $\Delta x \to 0$ і згадаємо «важливу границю» $\lim_{z\to 0}\frac{ln(1+z)}{z} = 1$, отримаємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right] = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{(lnx)' = \frac{1}{x}}. \qquad (4.19)$$

2) $y = \log_a x$.

Тоді за визначенням логарифму $a^y = x$. Логарифмуємо цю тотожність за основою e:

$$lna^y = lnx; \quad y \cdot lna = lnx; \quad y = \frac{1}{lna} \cdot lnx.$$

Отже, $y' = \frac{1}{lna} \cdot (lnx)' = \frac{1}{x \cdot lna}$.

Остаточно маємо

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}}. \qquad (4.20)$$

Похідні обернених тригонометричних функцій:

1. <u>*Похідна арксинуса*</u>. <u>$y = arcsinx$</u>.

Функція обернена до арксинуса $x = siny$, її похідна $x'_y = cosy$.

За формулою (4.12) маємо $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{cosy}$.

Відомо, що $cosy = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

Корінь беремо арифметичний,тому що значення функції $y = arcsinx$ лежить в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а косинус в цьому інтервалі додатний. Остаточно маємо

$$\boxed{(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}. \qquad (4.21)$$

2. <u>*Похідна арккосинуса*</u>. <u>$y = arccosx$</u>.

Аналогічно отримуємо

$$\boxed{(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}. \tag{4.22}$$

3. *<u>Похідна арктангенса</u>*. <u>$y = arctgx$</u>.

Функція обернена до арктангенса $x = tgy$, її похідна $x'_y = \frac{1}{cos^2y}$.

За формулою (4.12) маємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = cos^2y = \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2},$$

звідси

$$\boxed{(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}}. \tag{4.23}$$

4. *<u>Похідна арккотангенса</u>*. <u>$y = arcctgx$</u>.

Аналогічно отримуємо

$$\boxed{(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}. \tag{4.24}$$

Зведемо отримані формули у таблицю 4.1. Організуємо нашу таблицю наступним чином: ліворуч розташуємо формули для обчислення похідних простих функцій, а праворуч – складних. Незважаючи та те, що ці формули начебто дублюють один одного, але, на наш погляд, таке подання формул полегшує знаходження похідних, і ми спробуємо в цьому переконати на прикладах, які розглянемо після запису таблиці.

Таблиця 4.1. Таблиця похідних.

$y = f(x)$	$y = f\big(u(x)\big)$

$C' = 0$	
$x' = 1$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot lna$	$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$
$(lnx)' = \frac{1}{x}$	$(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(sinx)' = cosx$	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
$(cosx)' = -sinx$	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$
$(tgx)' = \frac{1}{(cosx)^2}$	$(tgu)' = \frac{1}{(cosu)^2} \cdot u'$
$(ctgx)' = -\frac{1}{(sinx)^2}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{(sinu)^2} \cdot u'$
$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Приклад 4.8. Знайти похідну функції

$$y = 7x^5 - 15\log_3 x - 4 \cdot 2^x + 3arctgx - 11.$$

Розв'язання: Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, тому кожний з доданків будемо диференціювати окремо, пам'ятаємо, що сталий множник можна виносити за знак похідної. Кожний з доданків – проста функція, тому скориставшись таблицею похідних, маємо:

$$y' = 7(x^5)' - 15(\log_3 x)' - 4 \cdot (2^x)' + 3(arctgx)' - (11)' =$$

$$= 7 \cdot 5x^4 - 15 \cdot \frac{1}{xln3} - 4 \cdot 2^x \cdot ln2 + 3 \cdot \frac{1}{1+x^2} - 0 =$$

$$= 35x^4 - \frac{15}{xln3} - 4 \cdot 2^x ln2 + \frac{3}{1+x^2}.$$

Приклад 4.9. Знайти похідну функції

$$y = (7arcsinx - 15) \cdot (2lnx + 3x^2).$$

Розв'язання: Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (4.6). Для цього розіб'ємо функцію на

$$u = 7arcsinx - 15 \quad \text{і} \quad v = 2lnx + 3x^2.$$

Знайдемо u' і v':

$$u' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}; \quad v' = \frac{2}{x} + 6x.$$

За формулою (4.6) маємо:

$$y' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (2lnx + 3x^2) + (7arcsinx - 15) \cdot \left(\frac{2}{x} + 6x\right).$$

Приклад 4.10. Знайти похідну функції $y = \frac{2e^x - cosx}{5tgx+8}$.

Розв'язання: Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (4.9). Для цього розіб'ємо функцію на

$$u = 2e^x - cosx \quad \text{і} \quad v = 5tgx + 8.$$

Знайдемо u' і v':

$$u' = 2e^x + sinx; \quad v' = \frac{5}{cos^2x}.$$

За формулою (4.9) маємо:

$$y' = \frac{(2e^x + sinx) \cdot (5tgx + 8) - (2e^x - cosx) \cdot \frac{5}{cos^2x}}{(5tgx+8)^2} =$$

$$= \frac{(2e^x + sinx) \cdot (5tgx+8) \cdot cos^2x - 5(2e^x - cosx)}{(5tgx+8)^2 \cdot cos^2x}.$$

Приклад 4.11. Знайти похідну функції

$$y = ln\, arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right).$$

Розв'язання: Функція, похідну якої нам запропонували знайти, складна. Тут є і степенева, і показникова, і логарифмічна, і обернена тригонометрична функції. З якої функції почати диференціювання? Ланцюжок складної функції, який ми можемо скласти, дуже великий. Тому радимо скористатися наступним прийомом: будемо промовляти кожного разу послідовність, в якої утворювалася надана функція; диференціювати ми завжди будемо в оберненому порядку. Тут можна провести аналогію процесу одягання – роздягання: ми завжди одягаємося в одному порядку, а роздягаємося в оберненому.

Промовимо, що ми зробимо, щоб знайти y за наданою функцією:

- Помножимо x на 3;
- аргумент $3x$ возведемо до експоненти;
- з одиниці віднімемо отриману функцію;
- візьмемо корінь квадратний з цього виразу;
- додамо одиницю;
- обчислимо арктангенс;
- візьмемо логарифм отриманого виразу.

Отже, знаходження функції ми закінчили логарифмом, тому й диференціювати почнемо з логарифму.

Скористаємося формулою $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Де за u приймемо: $u = arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)$.

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \left(arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)\right)'.$$

Читаємо наш список в оберненому порядку. Тепер будемо диференціювати арктангенс, а за u приймемо

$u = 1 + \sqrt{1 - e^{3x}}$:

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)'.$$

Продовжуємо диференціювання. Похідна від сталої дорівнює нулю, а корінь квадратний продиференцюємо за формулою $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, де $u = 1 - e^{3x}$.

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot (1 - e^{3x})'.$$

Тепер похідна від експоненти:

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot (-e^{3x}) \cdot (3x)'.$$

Остаточно маємо:

$$y' = -\frac{3e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{3x}}arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)\left(1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2\right)}.$$

Кожного разу при диференціюванні складних функцій ми будемо діяти аналогічно.

Приклад 4.12. Знайти похідну функції $y = sin^4 5x \cdot \log_7(tg3x + 18)$.

Розв'язання: Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (4.6):

$u = sin^4 5x; \quad v = \log_7(tg3x + 18).$

$u' = 4sin^3 5x \cdot (sin5x)' = 4sin^3 5x \cdot cos5x \cdot (5x)' =$

$= 20sin^3 5xcos5x;$

$v' = \frac{1}{(tg3x+18)ln7} \cdot (tg3x + 18)' = \frac{1}{(tg3x+18)ln7} \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot (3x)' =$

$= \frac{3}{cos^2 3x(tg3x+18)ln7}.$

Остаточно маємо:

$$y' = 20sin^3 5xcos5x \cdot \log_7(tg3x + 18) + \frac{3sin^4 5x}{cos^2 3x(tg3x+18)ln7}.$$

Приклад 4.13. Знайти похідну функції $y = \frac{5^{arcctg8x^3}}{ln^2(cos9x)}$.

Розв'язання: Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (4.9):

$u = 5^{arcctg8x^3}; \quad v = ln^2(cos9x).$

$u' = 5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot (arcctg8x^3)' =$

$$= 5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot \left(-\frac{1}{1+(8x^3)^2}\right) \cdot (8x^3)' =$$

$$= -\frac{5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot 24x^2}{1+64x^6}.$$

$$v' = 2ln(cos9x) \cdot \big(ln(cos9x)\big)' = 2ln(cos9x) \cdot \frac{1}{cos9x} \cdot (cos9x)' =$$

$$= 2ln(cos9x) \cdot \frac{1}{cos9x} \cdot (-sin9x) \cdot (9x)' = -18ln(cos9x) \cdot tg9x.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \frac{-\frac{5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot 24x^2}{1+64x^6} \cdot ln^2(cos9x) - 5^{arcctg8x^3} \cdot (-18ln(cos9x) \cdot tg9x)}{\big(ln^2(cos9x)\big)^2} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5^{arcctg8x^3} \cdot ln(cos9x)\Big(3tg9x \cdot \big(1+64x^6\big) - 4x^2 ln5 \cdot ln(cos9x)\Big)}{ln^4(cos9x)} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5^{arcctg8x^3}\Big(3tg9x \cdot \big(1+64x^6\big) - 4x^2 ln5 \cdot ln(cos9x)\Big)}{ln^3(cos9x)}.$$

4.1.8. Логарифмічне диференціювання

Розглянемо функцію вигляду

$$y = \big(f(x)\big)^{\varphi(x)},$$

де і основа, і показник степені є функціями незалежної змінної. Така функція має назву ***степенево-показникової функції***. Диференціювати її за формулами похідна степеневої, або похідна показникової функції не є можливим. Тому скористаємося наступним алгоритмом:

- логарифмуємо цю функцію за основою e:

$$\ln y = \ln\big(f(x)\big)^{\varphi(x)};$$

- скористаємося властивістю логарифмів і запишемо показник степені підлогарифмичного виразу як коефіцієнт перед логарифмом:

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln\big(f(x)\big);$$

- диференцюємо розташовану праворуч частину отриманої функції за формулою похідної добутку (або похідної частки), а ліворуч – за формулою складної функції:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'^{(x)} \cdot \ln\big(f(x)\big) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)};$$

- виразимо шукану похідну:

$$y' = y \cdot \left[\varphi'^{(x)} \cdot \ln\big(f(x)\big) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right],$$

або

$$\boxed{y' = \big(f(x)\big)^{\varphi(x)} \cdot \left[\varphi'^{(x)} \cdot \ln\big(f(x)\big) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]}. \quad (4.25)$$

Подане має назву ***логарифмічного диференціювання***, а отримана похідна називається ***логарифмічною похідною***.

Зауваження 1. Немає необхідності запам'ятовувати цю формулу. Значно простіше при диференціюванні степенево-показникових функцій на кожному прикладі використовувати запропонований алгоритм.

Приклад 4.14. Знайти похідну функції $y = (cos5x)^{\sqrt{x+3}}$.

Розв'язання: Скористаємося методом логарифмічного диференціювання:

$$\ln y = \ln(cos5x)^{\sqrt{x+3}};$$

$$\ln y = \sqrt{x+3} \cdot \ln(cos5x) \quad ;$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \cdot \ln(cos5x) + \sqrt{x+3} \cdot \frac{1}{cos5x} \cdot (-\sin 5x) \cdot 5;$$

$$y' = (cos5x)^{\sqrt{x+3}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x+3}} \cdot \ln(cos5x) - 5\sqrt{x+3} \cdot \mathrm{tg}5x\right].$$

Зауваження 2. Метод логарифмічного диференціювання застосовують не лише при диференціюванні показниково-степеневих функцій, а й при диференціюванні похідної від добутку або частки в тому випадку, коли множників більше двох. Застосування цього метода дозволяє скоріше та без зайвих обчислень отримати результат. Доведемо це на прикладі.

Приклад 4.15. Знайти похідну функції

$$y = 7^{\log_3(2x+5)} \cdot arcctg^4 5x \cdot \sqrt[5]{x^3 - 4x}.$$

Розв'язання: Дана функція має вигляд добутку трьох множників. Якщо спробувати скористатися формулою похідна від добутку, ми будемо змушені користатися цією формулою двічі, групуючи множники, та уважно підставляючи формулу до формули. А якщо множників 4, 5, 6…? Збільшення кількості множників суттєво ускладнює обчислення. Застосування же методу логарифмічного диференціювання цієї проблеми уникає.

Логарифмуємо дану функцію:

$$\ln y = \ln\left(7^{\log_3(2x+5)} \cdot arcctg^4 5x \cdot \sqrt[5]{x^3 - 4x}\right).$$

Згадаємо ще одну властивість логарифмів: «логарифм від добутку дорівнює сумі логарифмів множникі»:

$$\ln y = \ln 7^{\log_3(2x+5)} + \ln arcctg^4 5x + \ln \sqrt[5]{x^3 - 4x}.$$

Запишемо показники степенів підлогарифмічних функцій як коефіцієнти перед логарифмами:

$$\ln y = \log_3(2x+5) \cdot \ln 7 + 4 \cdot \ln arcctg5x + \frac{1}{5} \cdot \ln(x^3 - 4x).$$

Продиференцюємо отриману функцію:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{(2x+3)\ln 3} \cdot \ln 7 + 4 \cdot \left(-\frac{5}{1+25x^2}\right) + \frac{1}{5} \cdot \frac{3x^2-4}{x^3-4x}.$$

Остаточно маємо:

$$y' = 7^{\log_3(2x+5)} \cdot arcctg^4 5x \cdot \sqrt[5]{x^3 - 4x} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{2\ln 7}{(2x+3)\ln 3} - \frac{20}{1+25x^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3x^2-4}{x^3-4x}\right].$$

Як бачимо, збільшення кількості множників приводить до збільшення доданків. Тому при диференціюванні таких функцій будемо давати перевагу методу логарифмічного диференціювання.

4.1.9. Диференціювання неявної функції

Визначення неявної форми завдання функції було надано у розділі 3.1.3.

Диференціювання функції, яка задана деяким рівнянням $F(x, y) = 0$, де незалежна змінна x зв'язана з функцією y, що не розв'язується відносно y, зводиться до наступного:

- диференціюємо обидві частини рівняння за допомогою таблиці похідних та за правилами диференціювання, пам'ятаючи, що y є функція незалежної змінної x (тобто складна функція);
- розв'язуємо отримане рівняння відносно шуканої похідної y'.

Проілюструємо наведений алгоритм на прикладі.

Приклад 4.16. Знайти похідну функції

$$5x^3y - cos2x = 4y^2.$$

Розв'язання: Диференцюємо по x і пам'ятаємо, що y є функцією x:

$$15x^2 \cdot y + 5x^3 \cdot y' + 2sin2x = 8y \cdot y'.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y'. Для цього згрупуємо доданки з похідною у один бік рівняння, без похідної - в інший

$$8y \cdot y' - 5x^3 \cdot y' = 15x^2 \cdot y + 2sin2x.$$

Винесемо y' за дужки і знайдемо шукану похідну:

$$y'(8y - 5x^3) = 15x^2 \cdot y + 2sin2x;$$

$$y' = \frac{15x^2y+2sin2x}{8y-5x^3}.$$

Отже, будь-яку неявну функцію можна диференціювати за приведеними правилами. Похідна такої функції виражається через незалежну змінну і саму функцію.

4.1.10. Диференціювання функцій, заданої параметрично

Визначення параметричної форми завдання функції також було надано у розділі 3.1.3. Отже нехай задано функцію

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

де t - параметр, а $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ - неперервні і диференційовані функції аргументу t у деякому інтервалі $t \in (a, b)$.

Нехай в деякій точці $t_0 \in (a, b)$ існує похідна, яка не дорівнює нулю $x'_t = \varphi'_t(t_0) \neq 0$. Нехай для визначеності ця похідна в точці додатна, тоді додатною вона буде і в деякому околі точки t_0. З цього прямує, що функція $\varphi(t)$ монотонно зростаюча, а тому має обернену $t = t(x)$. Похідна оберненої функції (за формулою 4.12) дорівнює

$$x'_t = \frac{1}{t'_x}.$$

Виконаємо операцію виключення параметра, тобто підставимо $t = t(x)$ у вираз для $\psi(t)$, маємо:

$$y = \psi\big(t(x)\big) = \psi(x).$$

Знаходимо її похідну як похідну складної функції (4.11):

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x.$$

Підставимо похідну оберненої функції

$$y'_x = \psi'_t \cdot \frac{1}{\varphi'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$$

Остаточно маємо

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}. \qquad (4.26)$$

Приклад 4.17. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = arcctgt \end{cases}$.

Розв'язання: Обчислимо похідні функцій x і y за змінною t:

$$x'_t = \frac{2t}{t^2+1}; \quad y'_t = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Підставимо отримані вирази у формулу (4.26), спростимо результат:

$$y'_x = \frac{\frac{2t}{t^2+1}}{-\frac{1}{1+t^2}} = -2t.$$

4.1.11. Похідні вищих порядків

1. ***Функція задана явно $y = f(x)$***.

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в деякому інтервалі незалежної змінної x. Похідна від отриманої функції (якщо вона існує) називається похідною другого порядку або другою похідною від функції і позначається $f''(x)$.

За визначенням похідної

$$f''(x) = [f'(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Отже, якщо існує ця границя, то існує і друга похідна функції $y = f(x)$.

Саме так визначається і похідна третього порядку (як похідна від другої похідної) і так далі. Тому можемо дати визначення.

Визначення 4.4. ***Похідною n-го порядку $f^{(n)}(x)$*** називається похідна від похідної $(n-1)$–го порядку

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}. \quad (4.27)$$

Похідні вищих порядків мають велике прикладне значення для визначення фундаментальних понять математики, фізики та ін. Так, наприклад, згадаємо, що поняття похідної ми вводили розв'язуючи задачу про швидкість руху матеріальної точки. Похідна ж другого порядку характеризує швидкість зміни швидкості, або прискорення функції. Зауважимо, що надалі ми ще скористаємося похідними вищих порядків для дослідження функцій.

Приклад 4.18. Знайти третю похідну функції $y = x^3 arctgx$ і обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання: Згідно з визначенням, нам необхідно поступово знайти похідні першого, другого (як похідну від першої похідної) і третього (як похідну від другої похідної) порядку:

$$y' = 3x^2 \cdot arctgx + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \cdot arctgx + \frac{x^3}{1+x^2};$$

$$y'' = (y')' = 6x \cdot arctgx + 3x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2}{1+x^2} + \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2} =$$

$$= 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2+3x^4+3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} = 6x \cdot arctgx + \frac{4x^4+6x^2}{(1+x^2)^2};$$

$$y''' = (y'')' = 6 \cdot arctgx + 6x \cdot \frac{1}{1+x^2} +$$

$$+ \frac{(16x^3+12x)(1+x^2)^2 - (4x^4+6x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= 6 \cdot arctgx + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(1+x^2)[(4x^2+3)(1+x^2) - (4x^4+6x^2)]}{(1+x^2)^4} =$$

$$= 6arctgx + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(4x^2+3+4x^4+3x^2-4x^4-6x^2)}{(1+x^2)^3} =$$

$$= 6arctgx + \frac{6x(1+x^2)^2 + 4x(x^2+3)}{(1+x^2)^3} =$$

$$= 6arctgx + \frac{2x(3x^4+8x^2+9)}{(1+x^2)^3}.$$

Обчислимо значення отриманої функції у точці x_0:

$$y'''^{(x_0)} = y'''(0) = 0.$$

2. ***<u>Функція задана неявно $F(x, y) = 0$</u>*** .

При знаходженні похідних вищих порядків неявно заданої функції використовуємо той самий алгоритм, що і для знаходження похідної першого порядку неявно заданої функції. Згідно з визначенням похідних вищих порядків для знаходження n-ої похідної цю процедуру треба буде виконати n раз. При цьому при знаходженні наступної похідної, в отриманий вираз можна підставити знайдене значення попередньої похідної. Проілюструємо цей алгоритм на прикладі.

Приклад 4.19. Знайти похідну другого порядку функції

$$x^2 + 2xy^3 = cos4y.$$

Розв'язання: Знайдемо похідну першого порядку:

$$2x + 2y^3 + 6xy^2y' = -4siny \cdot y';$$

$$y'(6xy^2 + 4siny) = -(2x + 2y^3);$$

$$y' = -\frac{x+y^3}{3xy^2+2siny}.$$

Диференцюємо отриманий вираз ще раз, пам'ятаючи, що y є функція x:

$$y'' = -\frac{(1+3y^2y')(3xy^2+2siny)-(x+y^3)(3y^2+6xyy'+2cosy\cdot y')}{(3xy^2+2siny)^2} =$$

$$= -\frac{3xy^2+2siny-3xy^2-3y^5+y'(9xy^4+6y^2siny-6x^2y-6xy^4-2xcosy-2y^3cosy)}{(3xy^2+2siny)^2} =$$

$$= -\frac{2siny-3y^5+y'(3xy^4+6y^2siny-6x^2y-2xcosy-2y^3cosy)}{(3xy^2+2siny)^2}.$$

Підставимо в отриманий вираз знайдену раніше першу похідну заданої функції:

$$y'' = -\frac{2siny-3y^5-\frac{x+y^3}{3xy^2+2siny}(3xy^4+6y^2siny-6x^2y-2xcosy-2y^3cosy)}{(3xy^2+2siny)^2} =$$

$$= \frac{9x^2y^7+6y^2siny+3x^3y^7+6y^5-4sin^2y-3x^2y^4-6x^3y-2x^2cosy-4xy^3cosy-2y^6cosy}{(3xy^2+2siny)^3}.$$

3. ***Функція задана параметрично*** $\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}$.

Обчислити похідні вищих порядків для функції заданої параметрично складніше. Тому ми обмежимося знаходженням формули для обчислення другої похідної, при цьому зауважимо, що запропонований алгоритм можна використовувати для знаходження будь-якої похідної вищого порядку.

Для знаходження другої похідної від функції, що задана параметрично, диференцюємо вираз для першої похідної (4.26) як складну функцію незалежної змінної. Нехай $x = \varphi(t),\ y = y(x) = y\big(\varphi(t)\big) = y(t)$. Маємо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Диференцюємо цей вираз:

$$y'' = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^2}\frac{dt}{dx}.$$

Згадаємо, що $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x'_t}$. Підставимо в y'' і отримаємо остаточний вираз для другої похідної:

$$\boxed{y'' = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}}. \tag{4.28}$$

Приклад 4.20. Знайти похідну другого порядку функції

$$\begin{cases} x = arcsint \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}.$$

Розв'язання: Скористаємося формулою (4.28), для цього обчислимо перші і другі похідні x і y по t:

$x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$;

$$x''_{tt} = -\frac{1}{2}\frac{(-2t)}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)^3}};$$

$$y'_t = \frac{1}{2}\frac{(-2t)}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$y''_{tt} = -\frac{\sqrt{1-t^2} - t\cdot\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{1-t^2} = -\frac{1-t^2+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}.$$

Підставимо у формулу (4.28) отримані вирази, маємо:

$$y''_{xx} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{(1-t^2)^3}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3} = \frac{\frac{-1+t^2}{(1-t^2)^2}}{\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}} = -\sqrt{1-t^2}.$$

4.1.12. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна и диференційована при певних значеннях незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

З цього прямує, що відношення приросту функції до приросту аргументу можна представити у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon.$$

де ε - нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Звідси знаходимо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

Отже, бачимо, що нескінченно малий приріст функції Δy може бути представлений у вигляді двох доданків: величини, яка пропорційна нескінченно малому приросту незалежної змінної Δx та нескінченно малої, більш високого порядку у порівнянні з Δx.

Визначення 4.5. Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається ***диференціалом функції***:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її ***диференціалом*** dx:

$$\Delta x = dx.$$

Отже, остаточно маємо:

Диференціал функції дорівнює її похідної, помноженої на диференціал незалежної змінної:

$$\boxed{dy = f'(x)dx}. \tag{4.29}$$

Бачимо, що якщо відома похідна, легко знайти диференціал, та навпаки, якщо відомий диференціал, відразу знаходимо похідну. Тому дії знаходження похідної та диференціала мають спільну назву – ***диференціювання***.

4.1.13. Властивості диференціала

Диференціали основних елементарних функцій.

За визначенням диференціала, диференціал функції дорівнює похідної, помноженої на диференціал незалежної змінної. Нам відомі похідні основних елементарних функцій,отже, щоб знайти їх диференціали, необхідно відомі похідні помножити на диференціал незалежної змінної:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx; \qquad d(a^x) = a^x lna\, dx;$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x\, lna}dx; \qquad d(sinx) = cosx\, dx\ldots$$

Правила обчислення диференціалів

За відомими правилами обчислення похідних, знайдемо правила знаходження диференціалів:

а) диференціал алгебраїчної суми двох функцій.

Згадаємо похідну суми: $(u \pm v)' = u' \pm v'$. Помножимо обидві частини рівності на dx. Оскільки $du = u'dx,\ dv = v'dx$, маємо формулу для обчислення диференціалу алгебраїчної суми:

$$d(u \pm v) = du \pm dv.$$

б) диференціал добутку двох функцій.

Згадаємо похідну добутку: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Помножимо обидві частини рівності на dx. Оскільки $du = u'dx$, $dv = v'dx$, маємо формулу для обчислення диференціалу добутку:

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

в) диференціал частки двох функцій.

Згадаємо похідну частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$. Домножимо обидві частини рівності на dx. Оскільки $du = u'dx,\ dv = v'dx$, маємо формулу для обчислення диференціалу частки:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Диференціал складної функції. Інваріантність диференціала.

Нехай дано функції $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ - неперервні і диференційовані функції своїх аргументів. Похідна функції y за змінною x знаходиться за формулою (4.11) для обчислення похідної складної функції:

$$y' = f'_u \cdot u'_x.$$

Помножимо обидві частини рівності на dx,отримаємо

$$dy = f'_u \cdot u'_x dx.$$

Згадаємо, що $du = u'_x dx$,звідси маємо

$$dy = f'_u \cdot du. \qquad (4.30)$$

Тобто бачимо, що диференціал функції $y = f(u)$ має такий же самий вигляд, якщо б u була незалежною змінною функції y.

Ця властивість має назву ***інваріантності форми диференціала від аргументу функції***.

Диференціал функції $y = f(u)$ має незмінний вигляд в незалежності від того, чи є її аргумент u незалежною змінною або функцією незалежної змінної.

Приклад 4.21. Знайти диференціал функції

$$y = 7x^5 - 2ln(tgx) + 2^{cosx} \cdot arcsin5x.$$

Розв'язання:

$$dy = 7d(x^5) - 2d\big(ln(tgx)\big) + arcsin5x \cdot d(2^{cosx}) +$$

$$+2^{cosx} \cdot d(arcsin5x) = 35x^4dx - 2 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{cos^2x}dx +$$

$$+ arcsin5x \cdot 2^{cosx} \cdot ln2 \cdot (-sinx)dx + 2^{cosx} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}dx =$$

$$= \left(35x^4 - \frac{4}{sin2x} - arcsin5x \cdot 2^{cosx} \cdot ln2 \cdot sinx + \frac{5 \cdot 2^{cosx}}{\sqrt{1-25x^2}}\right)dx.$$

4.1.14. Застосування диференціалу у наближених обчисленнях

Згадаємо, що приріст функції визначається за формулою

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o).$$

Явний вираз приросту функції може бути виражений через приріст аргументу досить складною формулою. Спробуємо замінити приріст функції його диференціалом:

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) \approx f'(x_o)dx = dy$$

похибка цієї заміни мала (див. п. 4.1.12).

Отже, якщо відомі значення $f(x_o)$, $f'(x_o)$, dx, то наближене значення $f(x_o + dx)$ знайдемо за формулою:

$$\boxed{f(x_o + dx) \approx f(x_o) + f'(x_o)dx} \qquad (4.31)$$

Приклад 4.22. Знайти наближене значення функції

$y = x^5 - 2x^4 + 7x^2 + 15$, коли $x = 1{,}003$.

Розв'язання: Приймаємо $x_0 = 1,\ dx = 0{,}003$. Обчислимо значення функції у точці $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = f(1) = 1 - 2 + 7 + 15 = 21.$$

Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 14x.$$

Обчислимо її значення у точці $x_0 = 1$:

$$f'(x_0) = f'(1) = 5 - 8 + 14 = 11.$$

Скористаємося формулою (4.31), остаточно маємо:

$$f(1{,}003) \approx f(1 + 0{,}003) = 21 + 11 \cdot 0{,}003 = 21{,}033.$$

Приклад 4.23. Знайти пнаближене значення функції $y = arccos0{,}4991$.

Розв'язання: Приймаємо $y = arccosx$, $x_0 = 0{,}5$ $dx = -0{,}0009$. Обчислимо значення функції у точці $x_0 = 0{,}5$:

$$f(x_0) = f(0{,}5) = arccos0{,}5 = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472.$$

Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

та обчислимо її значення у точці

$$f'(x_0) = f'(0{,}5) = -\frac{1}{\sqrt{1-0{,}25}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1{,}1547.$$

Скористаємося формулою (4.31), остаточно маємо:

$$arccos0{,}4991 \approx f(0{,}5 - 0{,}0009) = 1{,}0472 + (-1{,}1547) \cdot (-0{,}0009) = 1{,}0482.$$

4.1.15. Геометричний сенс похідної і диференціалу

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і неперервна в точці x_0. Нехай відомі точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, та відомо, що $x_0 + \Delta x \in (a, b)$.

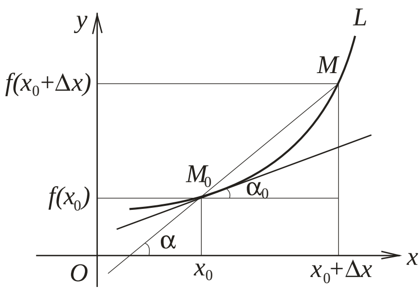


Рис. 4.1.

Проведемо січну M_0M (рис. 4.1). Вона визначається рівнянням

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

кутовий коефіцієнт якої дорівнює

$$k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Покажемо, що при $\Delta x \to 0$ відстань $|M_0M|$ між точками M_0 і M прямує до нуля. Дійсно, з неперервності функції $y = f(x)$ при $x = x_0$ маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Тобто, при $\Delta x \to 0$

$$|M_0M| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0.$$

Отже, якщо існує кінцева границя $\lim_{\Delta x \to 0} k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_д$, то пряма лінія, рівняння якої ми отримуємо з рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ при $\Delta x \to 0$ (рис. 4.1) називається ***дотичною*** до графіку функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Бачимо, що дотичною до графіку функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається граничне положення січної, якщо точка M прямує до точки M_0.

З розв'язання цієї задачі прямує геометричний сенс похідної, а саме:

Визначення 4.6. Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці дотику x_0 дорівнює ***кутовому коефіцієнту дотичної*** до кривої в цієї точці:

$$k_д = f'(x_0), \tag{4.32}$$

а ***рівняння дотичної*** має вигляд:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)} \tag{4.33}$$

Зауваження. Якщо $\lim_{\Delta x \to 0} k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то пряма (рис. 4.2), рівняння якої

$$x = x_0,$$

отримуємо при $\Delta x \to 0$ з рівняння січної, називається ***вертикальною дотичною*** до графіку функції $y = f(x)$ в точці x_0.

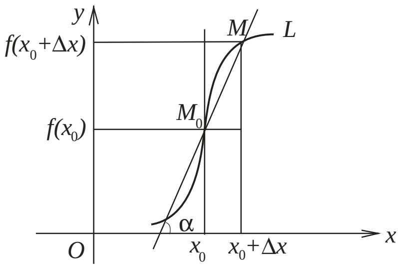


Рис. 4.2.

Близько пов'язане з поняттям дотичної, поняття нормалі до кривої.

Визначення 4.7. ***Нормаллю до кривої*** $y = f(x)$ ***в точці*** x_0 називається пряма лінія, перпендикулярна до дотичної у точці дотику.

З умови перпендикулярності прямих (2.22) знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі

$$k_{\text{н}} = -\frac{1}{k_{\text{д}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}, \tag{4.34}$$

отже шукане рівняння нормалі має вигляд

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}. \tag{4.35}$$

Приклад 4.24. Записати рівняння дотичної до кривої

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 13$$

в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Розв'язання: Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 8.$$

і обчислимо значення функції та її похідної в точці :

$y_0 = y(x_0) = y(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 13 =$

$= 54 - 27 + 24 - 13 = 38;$

$f'(x_0) = f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 44.$

Скористаємося формулою (4.33) і отримаємо шукане рівняння дотичної

$y - 38 = 44(x - 3);$

$y = 44x - 94.$

Приклад 4.25. З'ясувати, в яких точках кривої

$$y = -\frac{3}{x} + 12$$

її нормаль паралельна прямій $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

Розв'язання: За умовою паралельності (2.21) кутові коефіцієнти нормалі та заданої прямої повинні дорівнювати одне одному:

$$k_{\text{н}} = k.$$

Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = \frac{3}{x^2},$$

Отже кутовий коефіцієнт нормалі $k_{\text{н}} = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{x^2}{3}$

і скористаємося умовою паралельності

$$-\frac{x^2}{3} = -\frac{4}{3}; \qquad x^2 = 4; \qquad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Виявилося, що точок, які задовольняють умові, дві. Їх ординати знайдемо, підставивши знайдені абсциси до рівняння кривої:

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{3}{-2} + 12 = \dfrac{27}{2}, \\ y_2 = -\dfrac{3}{2} + 12 = \dfrac{21}{2}. \end{cases}$$

Отже, в точках $M_1\left(-2, \frac{27}{2}\right)$, $M_2\left(2, \frac{21}{2}\right)$ нормаль до кривої $y = -\frac{3}{x} + 12$ паралельна прямій $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

З'ясуємо геометричний сенс диференціала функції $y = f(x)$ (рис. 4.3). Так як $f'(x) = tg\alpha$, то диференціал $dy = f'(x)dx$ дорівнює довжині відрізку RT.

Визначення 4.8. ***Диференціал*** $\boldsymbol{dy}$ функції $y = f(x)$ в точці x може бути зображений приростом ординати точки дотичної, яка проведена до лінії $y = f(x)$ у відповідній точці $\big(x, f(x)\big)$.

Зауваження. Диференціал функції $y = f(x)$ у відповідній точці може бути як більше приросту функції $\Delta f(x)$ (рис. 4.3,а), так і менше його (рис. 4.3,б).

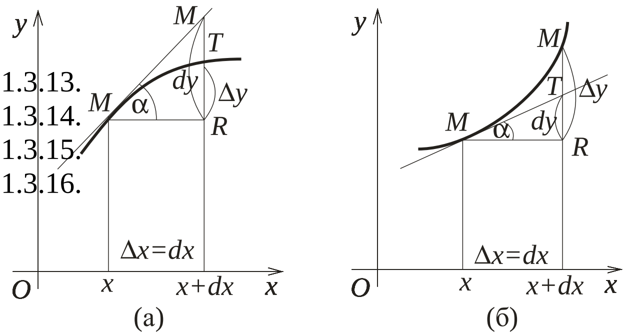


Рис. 4.3.

4.1.16. Фізичний сенс похідної та диференціалу

Згадаємо, що поняття похідної ми вводили, коли розв'язували задачу про швидкість зміни функції:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Нехай $s = s(t)$ - закон руху матеріальної точки, s - довжина шляху, t - час. Нехай M_1 - координата точки в момент часу t, а M_2 - в момент часу $t + \Delta t$; Δs - довжина шляху між точками M_1 і M_2, тобто $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ є середня швидкість руху на відрізку від M_1 до M_2, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ - *миттєвою швидкістю* в момент часу t, тобто

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t). \tag{4.36}$$

За визначенням диференціала, $ds = vdt$, з цього прямує, що диференціал шляху дорівнює відстані, яку б пройшла матеріальна точка за проміжок часу Δt від моменту t до моменту $t + \Delta t$, якщо б рухалася рівномірно з швидкістю, яка дорівнює миттєвої швидкості точки в момент t.

Аналогічно, прискорення руху – це швидкість зміни швидкості

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t), \tag{4.37}$$

тобто обчислюється за другою похідною від закону руху матеріальної точки

Приклад 4.26. Відомий закон руху матеріальної точки

$$s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 7t^2 - 18t + 5.$$

Знайти швидкість та прискорення точки через $t = 3$ с після начала руху.

Розв'язання: Скористаємося формулами (4.36) і (4.37). Для цього знайдемо першу та другу похідні закону руху

$v(t) = s'(t) = 3t^3 - t^2 + 14t - 18;$

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9t^2 - 2t + 14;$

і обчислимо їх значення в момент часу $t = 3$:

$v(3) = 81 - 9 + 42 - 18 = 96 \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$;

$a(3) = 81 - 6 + 14 = 89 \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$

Приклад 4.27. Відомі закони руху двох матеріальних точок, що рухаються рівномірно та прямолінійно вздовж осі Ox:

$$x_1 = 6t^2 + 4t - 8,\ \ x_2 = 5t^2 + 5t - 6.$$

З'ясувати, з якою швидкістю віддалялися матеріальні точки в момент зустрічі.

Розв'язання: Для зустрічі матеріальних точок необхідно і достатньо, щоб їх координати були рівними. Для цього прирівняємо x_1 і x_2 одне одному:

$6t^2 + 4t - 8 = 5t^2 + 5t - 6;$

$t^2 - t - 2 = 0;$

$t_1 = 2 \ \ c; \quad t_2 = -1 \ \ c.$

Зауважимо, що час не може приймати від'ємні значення. Отже, матеріальні точки зустрілися через 2 с після начала руху.

Знайдемо їх швидкості в момент $t = 2$. Для цього знайдемо похідні від законів руху і обчислимо їх значення в момент $t = 2$:

$v_1 = x_1' = 12t + 4;$ $\qquad$ $v_2 = x_2' = 10t + 5;$

$v_1(2) = 24 + 4 = 28\ ^{\text{м}}/_{\text{с}};$ $\qquad$ $v_2(2) = 20 + 5 = 25\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$

Швидкості матеріальних точок в момент зустрічі мають однаковий знак. Це свідчить про те, що точки рухаються в одному напрямку, тому віддалятися вони будуть зі швидкістю

$\Delta v = v_1 - v_2 = 28 - 25 = 3\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$

4.2. ГРАНИЧНИЙ АНАЛІЗ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Застосування похідної при розв'язанні економічних задач дозволяє отримувати граничні характеристики економічних об'єктів та процесів, таких як, наприклад, гранична виручка, корисність, продуктивність і т.п. Ці граничні характеристики визначають швидкість зміни економічного об'єкта або процесу.

Нехай витрати виробництва y будемо розглядати як функцію продукції, x, що випускається, тобто $y = C(x)$.

Визначення 4.9. ***Граничні витрати*** виробництва, які характеризують приріст змінних затрат на виробництво додаткової одиниці продукції – це похідна від функції продукції, що випускається:

$$y' = C'(x). \tag{4.38}$$

Середні витрати є витратами на випуск одиниці продукції:

$$y_1 = \frac{C(x)}{x}. \tag{4.39}$$

Нехай функція $u(t)$ описує виробництво продукції y за час t.

Визначення 4.10. Похідна від об'єму виробленої продукції за часом $u'(t_0)$ є ***продуктивність праці*** в момент часу t_0.

Введемо поняття функцій витрат та збереження. Нехай x - національний доход, $C(x)$ - функція споживання (частина доходу, що споживається), а $S(x)$ - функція збереження (частина доходу, що зберігається), тоді

$$x = C(x) + S(x). \tag{4.40}$$

Диференцюємо обидві частини (4.40), маємо

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1 \tag{4.41}$$

де $\frac{dC}{dx}$ -гранична прихильність до споживання;

$\frac{dS}{dx}$ - гранична прихильність до збереження.

Визначення 4.11. ***Еластичність*** – це міра реагування однієї змінної величини на зміну другої. Еластичність функції наближено вказує, на скільки відсотків зміниться одна змінна величина в результаті зміни іншої на 1 %.

Еластичність функції визначають за формулою:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x \qquad \text{або} \qquad E_x(y) = x \cdot T_y, \tag{4.42}$$

де $T_y = (lny)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$.

- ***відносна швидкість зміни (темп)*** функції.

Поняття еластичності функції застосовують при аналізі попиту і пропозиції від ціни товару (***цінова еластичність***). Вона характеризує реакцію попиту або пропозиції на зміну ціни і визначає, на скільки відсотків наближено зміниться попит або пропозиція при зміни ціни на 1%.

Якщо еластичність попиту $|E_x(y)| > 1$, то попит є ***еластичним***, якщо $|E_x(y)| = 1$ – ***нейтральним***, а якщо $|E_x(y)| < 1$ - ***нееластичним*** відносно ціни.

Приклад 4.28. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд

$$y = 1{,}2x^3 + 0{,}3x^2 - 4x + 120 \text{ (грошових одиниць).}$$

Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їх значення при $x = 20$.

Розв'язання:

Середні витрати:

$$y_1(x) = \frac{C(x)}{x} = 1{,}2x^2 + 0{,}3x - 4 + \frac{120}{x};$$

$$y_1(20) = 1{,}2 \cdot 400 + 0{,}3 \cdot 20 - 4 + \frac{120}{20} = 488.$$

Граничні витрати:

$$y'(x) = C'(x) = 3{,}6x^2 + 0{,}6x - 4;$$

$$y'(20) = 3{,}6 \cdot 400 + 0{,}6 \cdot 20 - 4 = 1448.$$

З отриманих результатів можемо зробити висновок, що на даному рівні виробництва (кількості продукції, що випускається) середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції складають 488 грошових одиниць, а збільшення об'єму на одну одиницю продукції буде коштувати фірмі 1448 грошових одиниці.

Приклад 4.29. Об'єм виробництва побутової техніки деякою фірмою виражається формулою

$$u(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t + 3250 \text{ (одиниць),}$$

де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) в першому кварталі ($t = 3$); в) в другому кварталі ($t = 6$); г) в третьому кварталі ($t = 9$); д) наприкінці року ($t = 12$).

Розв'язання:

Продуктивність праці – похідна від об'єму виробництва:

$$z(t) = u'(t) = 2t^2 - 5t + 4 \text{ (од./міс.)}.$$

Швидкість зміни продуктивності праці – похідна від продуктивності праці:

$$v_z = z'(t) = 4t - 5 \text{ (од./міс.}^2\text{)}.$$

Темп зміни продуктивності праці – логарифмічна похідна від продуктивності праці:

$$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{4t-5}{2t^2-5t+4} \text{ (од./міс.)}.$$

а) $\underline{t = 0}$:

$z(0) = 4$ (од./міс.); $v_z(0) = -5$ (од./міс.^{2}); $T_z(0) = -\frac{5}{4}$ (од./міс.);

б) $\underline{t = 3}$:

$z(3) = 18 - 15 + 4 = 7$(од./міс.); $v_z(3) = 12 - 5 = 7$ (од./міс.^{2}); $T_z(3) = 1$ (од./міс.);

в) $\underline{t = 6}$:

$z(6) = 72 - 30 + 4 = 46$ (од./міс.);

$v_z(6) = 24 - 5 = 19$ (од./міс.^{2}); $T_z(6) = \frac{19}{46}$ (од./міс.);

г) $\underline{t = 9}$:

$z(9) = 162 - 45 + 4 = 121$ (од./міс.);

$v_z(9) = 36 - 5 = 31$ (од./міс.^{2}); $T_z(9) = \frac{31}{121}$ (од./міс.);

д) $\underline{t = 12}$:

$z(12) = 288 - 60 + 4 = 232$ (од./міс.);

$v_z(12) = 48 - 5 = 43$ (од./міс.^{2}); $T_z(12) = \frac{43}{232}$ (од./міс.).

Приклад 4.30. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 35 + 0{,}7x + 0{,}18x\sqrt{x}$, де x - сукупний національний доход (грош. од.). Знайти:

а) граничну прихильність до споживання;

б) граничну прихильність до збереження,

якщо національний доход складає 81 млрд. грош. од.

Розв'язання: За формулою (4.40) національний доход складає $x = C(x) + S(x)$. Звідси функція збереження є

$$S(x) = x - C(x).$$

Знайдемо граничну прихильність до споживання

$$C'(x) = 0{,}7 + 0{,}18 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0{,}7 + 0{,}27\sqrt{x}$$

та її значення

$C'(81) = 0{,}7 + 0{,}27 \cdot \sqrt{81} = 3{,}13$ (млрд. грош. од.).

Гранична прихильність до збереження

$S'(x) = 1 - C'(x) = 1 - 0{,}7 - 0{,}27\sqrt{x} = 0{,}3 - 0{,}27\sqrt{x}$,

а її значення

$S'(81) = 0{,}3 - 0{,}27 \cdot \sqrt{81} = -2{,}13$ (млрд. грош. од.).

Приклад 4.31. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+15}{p+1}$ і пропозиції $s = p + 5$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються;

б) еластичність попиту та пропозиції.

Розв'язання:

а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$, тобто

$$\frac{9p+15}{p+1} = p + 5;$$

$9p + 15 = p^2 + 6p + 5;$

$p^2 - 3p - 10 = 0;$

$p_1 = -2$ (не має сенсу);

$p_2 = 5.$

Отже, рівноважна ціна $p = 5$ (грош.од.).

б) Знайдемо еластичність за попитом

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'_p = \frac{p(p+1)}{9p+15} \cdot \frac{9(p+1)-(9p+15)\cdot 1}{(p+1)^2} = -\frac{6p}{(9p+15)(p+1)}$$

і за пропозицією

$$E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot s'_p = \frac{p}{p+5} \cdot 1 = \frac{p}{p+5}.$$

Для рівноважної ціни $p = 5$:

$E_p(q)\Big|_{p=5} = -\frac{30}{60\cdot 6} = -\frac{1}{12} = -0{,}08;$

$E_p(s)\Big|_{p=5} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$

Враховуючи, що отримані значення еластичності (за абсолютним значенням) не перевищують одиниці, то попит і пропозиція даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції.

4.3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

4.3.1. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші

Теорема Ферма. Нехай дано функцію $y = f(x)$, неперервну на інтервалі $[x_1,\ x_2]$. Нехай функція $y = f(x)$ приймає своє найбільше (або найменше) значення у деякій точці x_0, що належить інтервалу $[x_1,\ x_2]$. Якщо в точці x_0 похідна існує, то вона дорівнює нулю:

$$f'(x_0) = 0. \qquad (4.43)$$

Доведення: Нехай для визначеності в точці x_0 функція $y = f(x)$ приймає своє найбільше значення. З цього прямує, що для будь-якої точки, що належить інтервалу $[x_1,\ x_2]$ повинна виконуватися умова:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Отже, якщо $x < x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0,$$

а якщо $x > x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

Якщо існує похідна, то існує і границя

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Якщо перейдемо до границі при $x \to x_0 - 0$ в першої нерівності, то отримаємо $f'(x_0) \geq 0$, аналогічно, з другої нерівності при $x \to x_0 + 0$ маємо $f'(x_0) \leq 0$. Ці нерівності одночасно виконуються лише при $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно доводиться теорема, якщо в точці x_0 функція приймає найменше значення.

Геометрична інтерпретація теореми Ферма: якщо в точці x_0 функція приймає своє найбільше (або найменше) значення в деякому околі точки x_0, то дотична до графіку функції в цій точці паралельна осі Ox (см. рис 4.4).

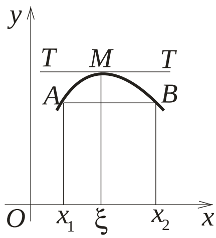


Рис. 4.4.

<u>Теорема Ролля</u>. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$, диференційована в усіх його внутрішніх точках і має на кінцях інтервалу рівні значення: $f(x_1) = f(x_2)$. Тоді існує хоча б одна така точка x_0, для якої справедливо наступне:

$$f'(x_0) = 0. \tag{4.44}$$

Доведення: Якщо на кінцях інтервалу значення функції дорівнюють одне одному,то можливі дві ситуації:

1) функція незмінна в усіх точках інтервалу $f(x) = f(x_1) = f(x_2)$. В такому випадку її похідна дорівнює нулю при будь-яких значеннях x;

2) якщо функція змінюється в інтервалі, то вона буде приймати своє найбільше (або найменше) значення хоча б у одній точці цього інтервалу $[x_1, x_2]$. За умовою теореми похідна існує в усіх внутрішніх точках інтервалу, а тому і в точках, де приймає свої найбільші або найменші значення. За теоремою Ферма похідна в цих точках дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.

Отже, теорему доказано.

Геометрична інтерпретація теореми Ролля: На лінії $y = f(x)$, де функція задовольняє умовам теореми Ролля, знайдеться точка, дотична у якій паралельна осі Ox (рис. 4.4).

Якщо $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то ***теорема Ролля*** набуває вигляду: між будь-якими нулями функції існує хоча б один нуль похідної.

Приклад 4.32. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = x^3 + 4x^2 - 7x + 10$ в інтервалі $[-1,2]$.

Розв'язання: Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу:

$$y(-1) = -1 + 4 + 7 + 10 = 20;$$

$$y(2) = 8 + 16 - 14 + 10 = 20.$$

Отже, задана функція задовольняє умовам теореми Ролля.

Знайдемо похідну функції і дорівняємо її до нуля:

$$y' = 3x^2 + 8x - 7; \qquad 3x^2 + 8x - 7 = 0.$$

Отримаємо точки $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{37}}{3}$. Точка $x_1 = \frac{-4+\sqrt{37}}{3}$ належить інтервалу $[-1,2]$, звідси прямує, що теорема Ролля справедлива.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1,\ x_2]$, диференційована в усіх його внутрішніх точках. Тоді існує хоча б одна така точка x_0, для якої справедливо наступне:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_0). \qquad (4.45)$$

Доведення: Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - \lambda x$$

і визначимо число λ так, щоб виконувалася умова $F(x_1) = F(x_2)$, тобто щоб $f(x_1) - \lambda x_1 = f(x_2) - \lambda x_2$. З цього прямує, що

$$\lambda = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Для функції $F(x)$ виконуються всі умови теореми Ролля: вона неперервна, диференційована в усіх внутрішніх точках інтервалу і приймає рівні значення на кінцях інтервалу: $F(x_1) = F(x_2)$. З цього прямує, що існує хоча б одна така точка, для якої виконується умова $F'(x_0) = 0$. Зрозуміло, що $F'(x) = f'(x) - \lambda$, а тому $f'(x) - \lambda = 0$. Підставимо сюди отримане нами значення λ, маємо

$$f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Отже, теорему доказано.

Формулу (4.45) називають ще *формулою кінцевих приростів Лагранжа*:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x) \cdot (x_2 - x_1).$$

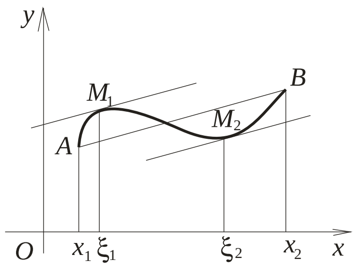


Рис. 4.5.

Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа: Нехай AB – хорда, яка стягує точки $A\big(x_1,\ f(x_1)\big)$ і

$B\left(x_2,\ f(x_2)\right)$ (см. рис. 4.5). А тому відношення $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ дорівнює тангенсу кута β нахилу хорди AB до додатного напрямку осі Ox, тобто

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = tg\beta,$$

а похідна, як нам вже відомо, дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці $\left(x_0,\ f(x_0)\right)$ і додатним напрямком осі Ox, тобто $f'(x_0) = tg\alpha$. Звідси зрозуміло, що $tg\alpha = tg\beta$.

Отже теорема Лагранжа показує, що в інтервалі $[x_1,\ x_2]$ повинна знайтися точка (хоча б одна), дотична в якої була б паралельна хорді AB.

Приклад 4.33. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції $y = lnx$ в інтервалі $[1, e]$.

Розв'язання: Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу:

$y(1) = ln1 = 0; \quad y(e) = lne = 1.$

Знайдемо похідну функції: $y' = \frac{1}{x}$.

Підставимо у формулу (4.3)

$$\frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{x}$$

знайдемо точку $x = e - 1$. Вона належить інтервалу $[1, e]$, тобто теорема Лагранжа для даної функції справедлива.

<u>Теорема Коши</u>. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в замкненому інтервалі $[x_1,\ x_2]$, диференційовані в усіх його внутрішніх точках, причому $\varphi'(x)$ в цих точках не обертається в нуль. Тоді існує хоча б одна така точка x_0, для якої справедливо наступне:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}. \tag{4.46}$$

Зауважимо, що $\varphi(x_2) \neq \varphi(x_1)$, тому що в протилежному випадку за теоремою Ролля в розглянутому інтервалі існувала би точка x_0, в якої похідна б дорівнювала нулю: $\varphi'(x) = 0$. А це заперечує умові теореми.

Доведення: Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - \lambda\varphi(x),$$

де λ оберемо так, щоб $F(x_1) = F(x_2)$, тобто щоб

$$f(x_1) - \lambda\varphi(x_1) = f(x_2) - \lambda\varphi(x_2).$$

Звідси

$$\lambda = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}.$$

Функція $F(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля. Звідси прямує, що існує така точка x_0 з інтервалу $[x_1,\ x_2]$, для якої $F'(x_0) = 0$. Продиференцюємо функцію $F(x)$: $F'(x) = f'(x) - \lambda\varphi'(x)$. Звідси $f'(x) - \lambda\varphi'(x) = 0$, а λ набуває вигляду

$$\lambda = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Прирівняємо отримані вирази для λ, маємо

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Отже, теорему доказано.

Формулу (4.46) називають ***формулою кінцевих приростів Коші***.

Геометрична інтерпретація теореми Коші: Теорема Коші з геометричної точки зору має таку ж саме інтерпретацію, що і теорема Лагранжа. Позначимо незалежну змінну через t і будемо вважати, що функції $f(t)$ і $\varphi(t)$ є параметричними рівняннями деякої лінії, причому $y = f(t)$, $x = \varphi(t)$. Коли параметр t пробігає інтервал $[t_1,\ t_2]$, змінна точка переміщується по лінії, початкова точка якої має координати $\left(\varphi(t_1), f(t_1)\right)$, а кінцева $\left(\varphi(t_2), f(t_2)\right)$. Кутовий коефіцієнт хорди, яка стягує ці точки, дорівнює відношенню $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}$. Похідна від функції, що задана параметрично (4.26), дорівнює $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$. Звідси формула

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)} = \frac{f'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad (t_1 < t_0 < t_2)$$

знов описує рівність кутового коефіцієнта хорди, що стягує кінці дуги, і кутового коефіцієнта дотичної, яка проведена в деякій точці розглянутого проміжку.

4.3.2. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

У п. 3.2 ми вже познайомилися з деякими правилами граничного переходу при розкритті невизначеностей. Познайомимося ще з одним простим і зручним прийомом обчислення границь – правилом Лопіталя. Це правило надалі ми будемо використовувати при дослідженні функцій.

Теорема Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (4.47)$$

Доведення цієї теореми в загальному випадку досить складне, тому розглянемо лише основні випадки.

Отже, нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначенні і неперервні в деякому околі точки x_0, і при $x \to x_0$ прямують до нуля і їх похідні в точці x_0 існують, причому $\varphi'(x) \neq 0$. За теоремою Лопіталя

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Оскільки $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$, то

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}.$$

Перейдемо до границі при $x \to x_0$ і скористаємося теоремою про границю частки (3.8), отримаємо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}},$$

за визначенням похідної остаточно маємо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Доведемо,що ця формула справедлива и при $x \to \infty$, за умовою, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані при достатньо великих x. Зробимо заміну $x = \frac{1}{z}$, зрозуміло, що, якщо $x \to \infty$, то $z \to 0$. Маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}.$$

Скоротимо отриманий вираз на $\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ і зробимо обернену заміну $\frac{1}{z}$ на x, отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Отже, для основних, найпростіших випадків теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо відношення похідних, як і відношення функції, дає невизначеність типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопіталя, якщо в цьому є сенс, можна використовувати знов і знов до отримання результату. При повторному використанні правила Лопіталя рекомендується спочатку виконати всі можливі спрощення, наприклад, скоротити чисельник та знаменник на спільні множники або скористатися вже відомими границями.

Приклад 4.33. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}.$$

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{3x^2-12} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{6x-8}{6x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Тут правилом Лопіталя для розкриття невизначеності необхідно було скористатися двічі.

Приклад 4.34. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{ln(1+x)}.$$

Розв'язання:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{ln(1+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to\infty}(1+x)=\infty.$

Приклад 4.35. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to0}\frac{1-cosx^2}{x^2sinx^2}.$$

Розв'язання:

$\lim_{x\to0}\frac{1-cosx^2}{x^2sinx^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot sinx^2}{2x\cdot sinx^2+x^2\cdot 2x\cdot cosx^2}=$

$=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot sinx^2}{2x\cdot(sinx^2+x^2\cdot cosx^2)}=\lim_{x\to0}\frac{sinx^2}{sinx^2+x^2\cdot cosx^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=$

$=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot cosx^2}{2x\cdot cosx^2+2x\cdot cosx^2-x^2\cdot 2x\cdot sinx^2}=$

$=\lim_{x\to0}\frac{cosx^2}{2cosx^2-x^2sinx^2}=\frac{1}{2}.$

При обчисленні границі двічі скористалися правилом Лопіталя, попередньо двічі скоротивши чисельник і знаменник дробі на спільний множник $2x$.

Зауваження 2. Важливо, що обчислення границь за правилом Лопіталя оправдані лише в тому випадку, якщо в результаті отримуємо кінцеву або нескінчену границю. Розглянемо приклад, коли правило Лопіталя для обчислення границь не можна застосовувати.

Приклад 4.36. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+sinx}{x}.$$

Розв'язання: Якщо спробуємо скористатися правилом Лопіталя при розкритті невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$, отримаємо

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+sinx}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+sinx)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+cosx}{1},$

цей вираз при $x \to \infty$ постійно приймає значення в інтервалі від 0 до 2 (тому що $|cosx| \leq 1$), а тому границі немає. Спробуємо обчислити методами, з якими познайомилися у розділі 3.2. Для цього почленно поділимо чисельник на знаменник:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+sinx}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{sinx}{x}\right) = 1.$$

Отже, границя існує і дорівнює 1.

Зауваження 3. За допомогою правила Лопіталя часто вдається знайти границі функцій у випадках, крім вже розглянутих невизначеностей типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ і $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, а саме $|\infty - \infty|$, $|0 \cdot \infty|$, $|1^{\infty}|$, $|\infty^0|$, $|0^0|$. Розкриття таких невизначеностей шляхом алгебраїчних перетворень і логарифмування зводиться до розкриття невизначеностей двох основних типів: $\left|\frac{0}{0}\right|$ і $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. Розглянемо кожну з цих ситуацій окремо.

1. ***Функція представлена різницею двох функцій, які одночасно прямують до нескінченності (невизначеність типу $|\infty - \infty|$)*** .

Для обчислення такої границі за правилом Лопіталя необхідно перетворити її до вигляду дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля або до нескінченності.

Приклад 4.37. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{7}{x^7-1}\right).$$

Розв'язання: Тут невизначеність $|\infty - \infty|$**.** Приведемо різницю дробів до загального знаменника. Отримали невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$, для її розкриття скористалися правилом Лопіталя двічі:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1}-\frac{7}{x^7-1}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 1}\frac{5(x^7-1)-7(x^5-1)}{(x^5-1)(x^7-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x^7-7x^5+2}{x^{12}-x^7-x^5+1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{35x^6-35x^4}{12x^{11}-7x^6-5x^4}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{210x^5-140x^3}{132x^{10}-42x^5-20x^3}=\frac{70}{70}=1.$$

2. <u>Функція представлена добутком нескінченно малої величини на нескінченно велику (невизначеність типу $|\mathbf{0}\cdot\infty|$)</u>

Для обчислення такої границі за правилом Лопіталя необхідно її перетворити на дріб, заміняючи функцію у множнику на їй обернену. В результаті отримаємо дріб, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля або до нескінченності.

Приклад 4.38. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} ctgx\cdot ln(x+e^x).$$

Розв'язання: Замінимо множення на котангенс, діленням на величину, обернену до котангенса. Згадаємо, що $\frac{1}{ctgx}=tgx$, отриманий дріб має невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$. Скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} ctgx\cdot ln(x+e^x)=|\infty\cdot 0|=\lim_{x\to 0}\frac{ln(x+e^x)}{\frac{1}{ctgx}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ln(x+e^x)}{tgx}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{\frac{1}{cos^2x}}=\frac{2}{1}=2.$$

3. <u>Функція має вигляд степенево-показникової (невизначеності типу: $|\mathbf{1}^\infty|$, $|\infty^\mathbf{0}|$, $|\mathbf{0}^\mathbf{0}|$)</u>

Для обчислення таких границь за правилом Лопіталя необхідно спочатку функцію, яка стоїть від знаком границі, прологарифмувати, знайти границю логарифма, а потім за знайденою границею логарифма знайти і границю самої функції.

Приклад 4.39. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Розв'язання: Перевіримо, чи є тут розглядувана невизначеність. Позначимо для зручності шукану границю як A:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = |1^{\infty}| = A.$$

Логарифмуємо дану границю. Скористаємося властивостями логарифмів і перетворимо отриману функцію до вигляду дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля при $x \to 1$. Скористаємося правилом Лопіталя:

$$lnA = ln \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} lnx^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} lnx =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{lnx}{1-x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

Знайдемо границю заданої функції, скориставшись основною властивістю логарифма, а саме: $A = e^{lnA} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

4.4. ПОВЕДІНКА ФУНКЦІЇ В ІНТЕРВАЛІ

4.4.1. Ознаки монотонності функції

<u>Теорема 4.1</u>. Для того щоб диференційована на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ зростала (спадала) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цього інтервалу похідна функції була невід'ємной, тобто $f'(x) \geq 0$ (недодатной $f'(x) \leq 0$).

Якщо на всьому досліджуваному інтервалі (a, b) похідна додатна: $f'(x) > 0$ (або від'ємна: $f'(x) < 0$), то функція $y = f(x)$ на ньому строго зростає (строго спадає).

Доведення:

Необхідність. Якщо функція $y = f(x)$ зростає на інтервалі (a, b), то для будь-якої точки $x_0 \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$ маємо $y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$. Звідси $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Якщо перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0.$$

Аналогічно, якщо функція спадає, то для будь якої точки $x_0 \in (a, b)$ маємо $y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$. Звідси $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x) \leq 0.$$

Достатність. Візьмемо в досліджуваному інтервалі дві будь які точки x_1 і x_2, такі, що $a < x_1 < x_2 < b$. За формулою Лагранжа (4.45) маємо:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0), \qquad x_1 < x_0 < x_2.$$

Тому що $x_1 < x_2$, різниця $x_2 - x_1$ додатна і знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$ повністю визначається знаком похідної $f'(x_0)$. Отже, якщо $f'(x_0) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1,$$

а з цього прямує, що функція $y = f(x)$ зростає.

Якщо похідна $f'(x)$ всюди від'ємна, то $f'(x_0) < 0$, а з цього прямує, що $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, тобто функція спадає.

4.4.2. Екстремуми функції

Особливу увагу потрібно приділити тим значенням не залежної змінної x, які відокремлюють інтервал зростання від інтервалу спадання або інтервал спадання від інтервалу зростання функції (рис. 4.6).

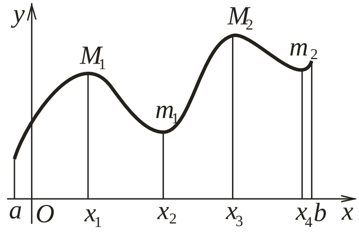


Рис. 4.6.

Визначення 4.12. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***максимуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найбільше значення функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 4.7, а).

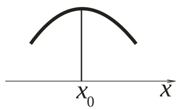


Рис. 4.7, а

Визначення 4.13. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***мінімуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найменше значення функції в деякому околі точки x_0 (рис. 4.7, б).

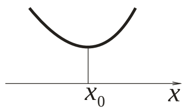


Рис. 4.7, б

Точки максимуму та мінімуму називаються точками ***екстремуму*** функції.

Теорема 4.2. *(необхідна ознака екстремуму).* Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то похідна функції в цій точці або дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$, або не існує.

Доведення: Дійсно, якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то значення функції в ній є найбільшим (або найменшим) в деякому околі точки x_0. Звідси прямує, що якщо в точці x_0 існує похідна, то, за теоремою Ферма, вона дорівнює нулю.

Теорема 4.3.*(достатня ознака існування екстремуму функції).* Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при переході x через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний; при зміні знака $+$ на $-$ точка x_0 є точкою максимуму, при зміні $-$ на $+$ точка x_0 є точкою мінімуму.

Доведення: Нехай при переході x зліва направо через x_0 похідна змінює знак з $+$ на $-$; з цього прямує, що ліворуч точки x_0 розташований інтервал зростання функції, а праворуч – інтервал спадання функції. Тобто, точка x_0 є точкою максимуму функції.

Аналогічно можна переконатися, що при зміні знака похідної з $-$ на $+$ і при переході x через x_0 зліва направо точка x_0 є точкою мінімуму функції.

4.4.3. Схема дослідження функції на монотонність та екстремум

Вкажемо послідовність дій для з'ясування інтервалів монотонності та екстремумів функції як в кінцевому, так і в нескінченному інтервалі.

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, похідна в яких дорівнює нулю $f'(x) = 0$ або не існує.
3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) точки, похідна в яких дорівнює нулю або не існує, та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб'ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності функції.
4. З'ясуємо знак похідної в кожному з часткових інтервалів, для цього достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалів монотонності: якщо $f'(x) > 0$, то функція зростає, якщо $f'(x) < 0$ - спадає.

5. Прослідкуємо за зміною знака похідної при переході зліва направо через границі інтервалів монотонності функції і з'ясуємо, які з критичних точок є мінімумами, а які – максимумами. Може так статися, що деяка точка не є точкою екстремуму функції. Це може статися, якщо в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, похідна має однаковий знак.
6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування екстремуму і обчислимо екстремальні значення функції.

Приклад 4.40. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{x+1}$ на монотонність та екстремуми.

Розв'язання:

Встановимо область визначення функції (ОВФ): $x + 1 \neq 0$; $x \neq -1$, тобто $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Знайдемо похідну функції: $y' = \frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$.

Знайдемо критичні точки $y' = 0$; $\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = 0$;

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

З'ясуємо знак першої похідної в отриманих часткових інтервалах, встановимо характер поведінки функції. Результати досліджень зведемо у таблицю:

x	$\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y' y	$+$ зростає	0 $y_{max} = \frac{27}{4}$	$-$ спадає	не існує	$-$ спадає	0 $y_{min} = 0$	$+$ зростає

або на числову пряму (рис. 4.8):

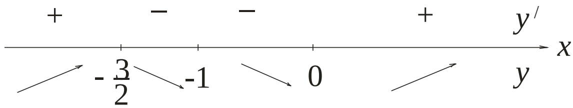


Рис. 4.8.

Отже, функція зростає на інтервалі $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; +\infty)$, спадає на інтервалі $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0)$. В точці $x = -\frac{3}{2}$ функція має максимум: $y_{max} = \frac{27}{4}$, а в точці $x = 0$ - мінімум: $y_{min} = 0$.

4.4.4. Найбільше і найменше значення функції в інтервалі

Розв’язання задачи на найбільше та найменше значення функції в інтервалі пов’язано з дослідженням функції на монотонність та екстремум. Зрозуміло, що функція $y = f(x)$ може приймати найбільше M або найменше m значення або в точках екстремуму, або на кінцях інтервалу $[a; b]$. Можливу ситуацію проілюструємо на рис. 4.9. Отже, для знаходження найбільшого і найменшого значення функції необхідно:

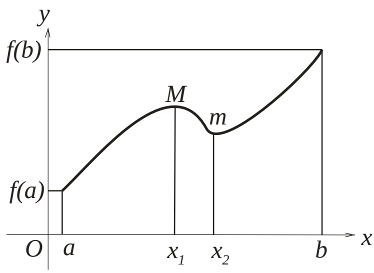


Рис. 4.9.

1. Розв'язати задачу на екстремум функції.
2. Обчислити значення функції в точках екстремуму (лише тих, що належать обраному інтервалу) і на кінцях інтервалу.
3. Порівняти отримані значення і обрати з них найбільше та найменше.

Окремо розглянемо задачки, в яких дві величини пов'язані функціональною залежністю, і потрібно знайти значення однієї з них (це значення може бути або обмеженим певним інтервалом, або необмеженим), при якому інша приймає найбільше або найменше значення. Для розв'язання таких задач необхідно скласти рівняння, яке описує функціональну залежність цих величин, а потім знайти найбільше або найменше значення функції за описаною схемою.

Приклад 4.41. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x\ln x$ в інтервалі $[e^{-3};\ \ 1]$.

Розв'язання:

Проведемо дослідження функції на екстремум:

ОВФ: $x > 0$ або $x \in (0, \infty)$.

$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1;$

$y' = 0; \quad \ln x + 1 = 0; \quad \ln x = -1; \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

Критична точка належить досліджуваному інтервалу. Обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях інтервалу:

$y(e^{-3}) = e^{-3}\ln e^{-3} = \frac{1}{e^3}\ln e^{-3} = -\frac{3}{e^3}\ln e = -\frac{3}{e^3};$

$y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln e^{-1} = -\frac{1}{e}\ln e = -\frac{1}{e};$

$y(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0;$

Отже, найбільше значення функція набуває в точці $x = 1$: $M = y(1) = 0$ а найменше значення – в точці $x = \frac{1}{e}$: $m = y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

Приклад 4.42. Визначити, при яких розмірах відкритого басейну з квадратним дном, на облицювання стін і дна буде затрачено найменшу кількість матеріалу. Об'єм басейну V фіксований.

Розв'язання: Басейн має форму прямокутного паралелепіпеду. Його об'єм визначається за формулою $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Позначимо сторону основи квадратного дна басейну за x. Звідси площа основи: $S_{\text{осн}} = x^2$.

Висоту басейну визначимо як $h = \frac{V}{S_{\text{осн}}} = \frac{V}{x^2}$. Маємо бічну площу поверхні $S_{\text{біч}} = 4h \cdot x = 4\frac{V}{x^2} \cdot x = \frac{4V}{x}$. Отже, загальна площа, яку необхідно облицювати, дорівнює $S = x^2 + \frac{4V}{x}$. Дослідимо цю функцію на екстремум:

$$S' = 2x - \frac{4V}{x^2} = \frac{2x^3 - 4V}{x^2};$$

$$S' = 0; \quad 2x^3 - 4V = 0; \quad x = \sqrt[3]{2V}.$$

Після з'ясування знаків S' в кожному з часткових інтервалів, встановили, що в точці $x = \sqrt[3]{2V}$ функція набуває мінімуму. Отже, при стороні дна $x = \sqrt[3]{2V}$ і висоті $h = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ басейн фіксованого об'єму потребує найменшу кількість облицювального матеріалу.

4.4.5. Опуклість та угнутість функцій. Точки перегину

Визначення 4.14. Дуга називається ***опуклою***, якщо вона перетинається з будь-якою своєю січною не більш, ніж в двох точках.

Якщо дуга опукла, вона цілком розташована по одну сторону від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може обертатися як опуклістю вгору (рис. 4.10, а), або донизу (рис. 4.10, б).

Лінії, обернені опуклістю вгору, називаються ***опуклими*** (опукла дуга розташована під дотичною); лінії, обернені опуклістю донизу, називаються ***угнутими*** (опукла дуга розташована над дотичною).

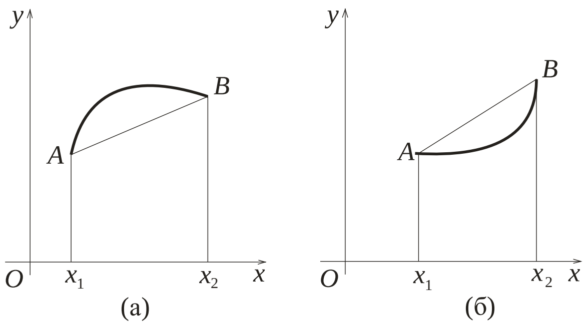


Рис. 4.10.

Особливу роль грають точки, які відділяють інтервали опуклості і угнутості функції.

Визначення 4.15. ***Точкою перегину*** функції називається точка лінії, яка відділяє опуклу дугу від угнутої.

В точці перегину функції дотична перетинає лінію; в околі цієї точки лінія розташована по обидві сторони від дотичної.

З’ясуємо ознаки опуклості та угнутості функції та умови існування точок перегину.

<u>Теорема 4.4.</u> Для того щоб двічі диференційована на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ була опукла (угнута) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цього інтервалу друга похідна функції була від’ємною, тобто $f''(x) \geq 0$ (додатною $f''(x) \leq 0$).

Доведення: Проведемо пряму через точки $A\big(x_1,\ f(x_1)\big)$ і $B\big(x_2,\ f(x_2)\big)$, які належать графіку функції $y = f(x)$. Її рівнянням є

$$y = \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}.$$

Позначимо праву частину рівняння через $l(x)$. Тому рівняння січної має вигляд $y = l(x)$.

Нехай $a < x_1 < x < x_2 < b$. Знайдемо різницю

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} - f(x)\frac{(x-x_1)+(x_2-x)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2)-f(x)](x-x_1)-[f(x)-f(x_1)](x_2-x)}{x_2-x_1}.$$

За теоремою Лагранжа маємо

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2-x)(x-x_1)-f'(\xi)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{\big[f'(\eta)-f'(\xi)\big](x_2-x)(x-x_1)}{x_2-x_1},$$

де $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

Знов скористаємося теоремою Лагранжа:

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x_2 - x)(x - x_1)(\eta - \xi)}{x_2 - x_1}$$

Звідси бачимо, що якщо $f'' < 0$ на інтервалі $(a; b)$, то $l(x) < f(x)$, тобто функція опукла; а якщо $f'' > 0$ на інтервалі $(a; b)$, то $l(x) > f(x)$, тобто функція угнута.

Теорема 4.5. *(необхідна умова існування точок перегину).* Якщо в точці x_0 перегину функції $y = f(x)$ існує друга похідна, то вона дорівнює нулю: $f''(x_0) = 0$.

Теорема 4.6. *(достатня умова існування точок перегину).* Точка (x_0, y_0) (якщо в цій точці виконується необхідна умова) є точкою перегину лінії $y = f(x)$, якщо друга похідна функції $f''(x)$ змінює знак при переході x через x_0.

Пропонуємо читачеві провести доведення цих теорем самостійно.

4.4.6. Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину

Вкажемо послідовність дій для з'ясування інтервалів опуклості, угнутості і точок перегину.

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, тобто точки, друга похідна в яких дорівнює нулю $f''(x) = 0$ або не існує.
3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) критичні точки та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб'ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких друга похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами опуклості або угнутості функції.
4. З'ясуємо знак другої похідної в кожному з часткових інтервалів, для чого достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком другої

похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалі: якщо $f''(x) > 0$, то функція угнута, якщо $f''(x) < 0$ - опукла.

5. Простежимо за зміною знака другої похідної при переході через границі інтервалів опуклості і угнутості функції і з'ясуємо, які з критичних точок є точками перегину функції. Може так статися, що деяка критична точка не є точкою перегину функції. Це може статися, якщо в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, друга похідна має однаковий знак.
6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування точок перегину і обчислимо їх ординати.

Приклад 4.43. Дослідити функцію на опуклість, угнутість і знайти точки перегину функції $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

Розв'язання:

ОВФ: $x \in R$.

Знайдемо першу і другу похідні функції:

$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x$; $\qquad$ $y'' = 12x^2 - 72x + 96$.

Знайдемо критичні точки:

$y'' = 0$; $\qquad 12x^2 - 72x + 96 = 0| : 12$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$$

Винесемо результати досліджень або в таблицю

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'' y	$+$ угнута	0 $y_{\text{т.п.}} = 62$	$-$ опукла	0 $y_{\text{т.п.}} = 206$	$+$ угнута

або на числову вісь (рис. 4.11):

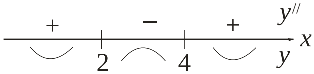


Рис. 4.11.

Отже, функція опукла на інтервалі $x \in (2; 4)$, угнута на інтервалі $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. В точках $x = 2$ і $x = 4$ функція має перегин.

4.4.7. Асимптоти функції

Визначення 4.16. Пряма лінія A називається ***асимптотою*** лінії L, якщо відстань від точки лінії L до прямої A прямує до нуля при нескінченному віддаленні цієї точки від початку координат.

Можливі випадки існування ***вертикальної*** та ***похилої*** асимптот. Розглянемо кожен з них.

Нехай лінія $y = f(x)$ має ***вертикальну асимптоту***. Її рівняння буде $x = x_0$, звідси, згідно з визначенням асимптоти обов'язково виконується умова $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Отже, якщо

$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty} \qquad (4.48)$$

то лінія $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту

$$\boldsymbol{x = x_0}. \qquad (4.49)$$

Взаємне розташування нескінченної вітки функції та її вертикальної асимптоти можна з'ясувати дослідженням знака нескінченності, до якої прямує $f(x)$, коли x прямує до x_0 ліворуч або праворуч. Можливі варіанти розташування вертикальної асимптоти і графіку функції зображені на рис. 4.12.

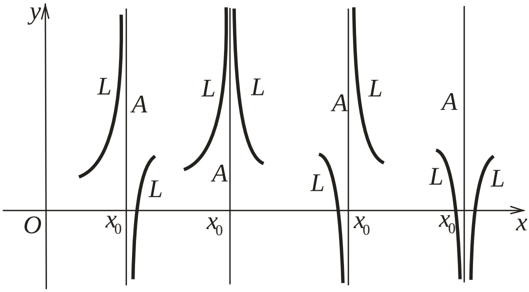


Рис. 4.12.

Нехай лінія $y = f(x)$ має ***похилу асимптоту***. Рівнянням такої асимптоти буде $y = kx + b$. За визначенням асимптоти відстань MN_1 точки M на лінії L від асимптоти A (см. рис. 4.13) прямує до нуля при $x \to \infty$. Розглянемо замість відстані MN_1 відстань MN, тобто різницю між ординатами точок M і N, які мають ту ж саму абсцису. Зрозуміло, що ці відстані одночасно прямують до нуля при $x \to \infty$.

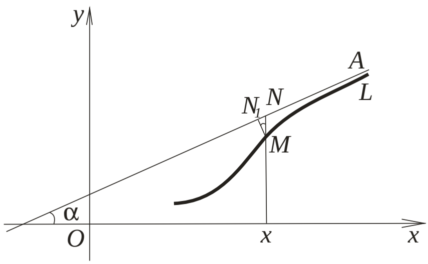


Рис. 4.13.

Ордината точки M дорівнює значенню функції $f(x)$, а ордината точки N - значенню лінійної функції $y = kx + b$. Звідси

$$MN = [f(x) - (kx + b)].$$

З цього прямую, що якщо

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0.$$

то лінія $y = f(x)$ має асимптоту $y = kx + b$. Тобто знаходження похилої асимптоти зводиться до знаходження таких чисел k і b, що

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0. \qquad (4.50)$$

звідси справедливо, що

$$f(x) = kx + b + \alpha(x).$$

де $\alpha(x)$ - нескінченно мала при $x \to \infty$. Поділимо обидві частини рівності на x і перейдемо до границі при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right).$$

З $\frac{b}{x} \to 0$ і $\frac{\alpha(x)}{x} \to 0$ прямує, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k. \qquad (4.51)$$

Отже, якщо існує така кінцева границя (4.51), то існує і похила асимптота.

Знайдемо b з (4.50):

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b. \qquad (4.52)$$

Якщо існують кінцеві границі (4.51), (4.52), то лінія $y = f(x)$ має похилу асимптоту

$$y = kx + b. \qquad (4.53)$$

Зауваження. Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється в горизонтальну:

$$y = b, \quad \text{де} \quad b = \lim_{x\to\infty} f(x). \qquad (4.54)$$

Приклад 4.44. Знайти асимптоти функції $y = \frac{e^{x-5}}{2x+3}$.

Розв'язання: ОВФ: $2x + 3 \neq 0$; $x \neq -\frac{3}{2}$;

$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Знайдемо вертикальну асимптоту. Візьмемо точку розриву функції $x = -\frac{3}{2}$ і перевіримо виконання умови (4.48):

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} y(x) = \lim_{x\to-\frac{3}{2}} \frac{e^{x-5}}{2x+3} = \infty.$$

Отже, пряма $x = -\frac{3}{2}$ є вертикальною асимптотою функції.

Знайдемо похилу асимптоту. Для цього обчислимо границі (4.51), (4.52) при $x \to \pm\infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x-5}}{2x^2+3x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x-5}}{4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x-5}}{4} = \infty;$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-5}}{2x^2+3x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(2x^2+3x)e^{-(x-5)}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Зауважимо, що обчислюючи границю при $x \to \infty$ ми двічі скористалися правилом Лопіталя, щоб уникнути невизначеності. При цьому кінцевої границі не отримали, тому при $x \to \infty$ похилої асимптоти не існує. При $x \to -\infty$ невизначеності не виникло; замість обчислення $e^{-\infty}$, ми перемістили експоненту в знаменник і отримали кінцеву границю $k = 0$. А цей випадок відповідає горизонтальній асимптоті. Обчислимо b при $x \to -\infty$:

$$b = \lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-5}}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(2x+3)e^{-(x-5)}} =$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, при $x \to -\infty$ існує горизонтальна асимптота $y = 0$.

4.4.8. Загальна схема дослідження функції

Спробуємо об'єднати попередньо отримані знання для дослідження функції та побудови її графіка. Пропонуємо наступну схему:

1. ***Область визначення функції*** (ОВФ).
2. ***Точки перетину з осями координат***. Нагадаємо, що з віссю Ox лінія перетинається, якщо $y = 0$; а з віссю Oy, якщо $x = 0$.
3. ***Інтервали знакопостійності***. На числовій осі необхідно відзначити точки перетину з віссю Ox і точки, в яких функція не існує (ОВФ). Обчислимо знак функції в кожному з отриманих інтервалів. Там, де $y > 0$ графік функції розташовано в верхній полуплощині, де $y < 0$ - в нижній.
4. ***Парність (непарність) функції***. Нагадаємо, що функція парна, якщо виконується умова $y(-x) = y(x)$; непарна – якщо $y(-x) = -y(x)$. Якщо не виконується ні одна з цих умов, функція загального положення. Ця інформація дуже корисна при побудові графіка функції: графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції – відносно початку координат.
5. ***Періодичність***. Якщо функція періодична, то $y(x+T) = y(x)$, де $T \neq 0$ - період функції.
6. ***Дослідження функції на монотонність та екстремуми*** (дослідження за допомогою першої

похідної). Схема цього дослідження приведена в п. 4.4.3.

7. ***Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину*** (дослідження за допомогою другої похідної). Схема цього дослідження приведена в п. 4.4.6.
8. ***Асимптоти функції***. См. п. 4.4.7.
9. ***Графік функції***. Графік функції будується за результатами попередніх досліджень. При побудові нас цікавить поведінка функції на інтервалах і у критичних точках. Тому графік, який ми отримуємо носить якісний характер.

Приклад 4.45. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ і побудувати її графік.

Розв'язання: Проведемо дослідження за запропонованою схемою.

1. ОВФ: $x^2 - 4 \neq 0$; $x \neq \pm 2$; $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Знайдемо точки перетину з осями координат:

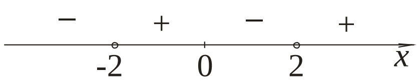
Ox: $y = 0$; $\frac{x^3}{x^2-4} = 0$; $x = 0$. Отже функція перетинає вісь

Ox у початку координат $O(0,0)$.

Oy: $x = 0$; $y = \frac{0}{0-4} = 0$. Функція перетинає вісь Oy теж у

початку координат $O(0,0)$.

3. Нанесемо на числову вісь точки перетину графіка з віссю Ox та точки, в яких функція не існує; обчислимо знак функції на кожному інтервалі:



Отже, функція додатна на інтервалі $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$ і від'ємна на інтервалі $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

4. Перевіримо функцію на парність:

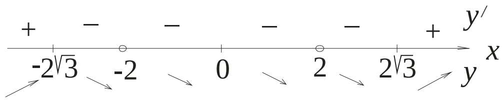
$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -y(x).$$

З цього прямує, що функція непарна.

5. Функція неперіодична.
6. Дослідимо функцію на монотонність на екстремуми. Знайдемо першу похідну та критичні точки:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}; \qquad y' = 0: \qquad x_{1,2,3} = \left[\begin{array}{c} 0; \\ -2\sqrt{3}; \\ 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Нанесемо критичні точки та точки в яких функція не існує на числову вісь, обчислимо знак першої похідної в кожному з отриманих інтервалів:



Обчислимо значення функції в екстремальних точках:

$$y_{min} = y(2\sqrt{3}) = \frac{(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2-4} = 3\sqrt{3};$$

$$y_{max} = y(-2\sqrt{3}) = \frac{(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2-4} = -3\sqrt{3}.$$

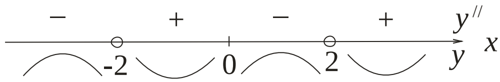
Функція зростає на інтервалах $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$, спадає на інтервалах $x \in (-2\sqrt{3}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 2\sqrt{3})$. В точці $M_1(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$ функція набуває максимуму, а в точці $M_2(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$ - мінімуму.

7. Дослідимо функцію на опуклість, угнутість та знайдемо точки перегину. Знайдемо другу похідну, критичні точки та винесемо ці точки разом з точками розриву функції на числову вісь:

$$y'' = \frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-(x^4-12x^2)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2-4)[(x^2-6x)(x^2-4)-(x^4-12x^2)]}{(x^2-4)^4} = \frac{4x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3};$$

$$y'' = 0; \quad \frac{4x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3} = 0; \quad x = 0.$$



Знайдемо ординату точки перегину функції:

$$y_{\text{т.п.}} = y(0) = \frac{0}{0-4} = 0.$$

Функція опукла на інтервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$ і угнута на інтервалах $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$; $P(0; 0)$ - точка перегину функції.

8. Знайдемо асимптоти функції.

У функції є дві точки розриву $x = -2$ і $x = 2$. Перевіримо, чи будуть лінії $x = -2$ і $x = 2$ вертикальними асимптотами функції:

$$\lim_{x\to-2} y(x) = \lim_{x\to-2} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to2} y(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^3}{x^2-4} = \infty.$$

Так, лінії $x = -2$ і $x = 2$ є вертикальними асимптотами функції.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2-4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{6x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4} - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2-4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Отже, похила асимптота задається рівнянням $y = x$.

9. Всі отриманні знання про поведінку функції у графіку (рис. 4.14):

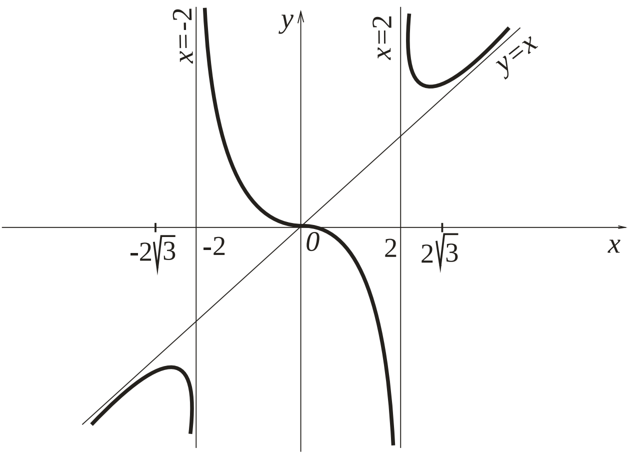


Рис. 4.14

4.4.9. Застосування похідної в задачах з економічним змістом

Поняття похідної може бути використано у розв’язанні прикладних задач економіки. Введемо основні поняття.

Нехай відома ***функція витрат*** $\boldsymbol{C(x)}$, яка визначає необхідні витрати для виробництва x одиниць даного продукту. ***Прибуток виробництва*** $\boldsymbol{P(x)}$ визначається як різниця між ***доходом*** $D(x)$ ***від виробництва*** x одиниць продукту і функцією витрат:

$$P(x) = D(x) - C(x). \tag{4.55}$$

Середні витрати $\boldsymbol{A(x)}$ при виробництві x одиниць продукції визначаються як

$$A(x) = \frac{C(x)}{x}. \tag{4.56}$$

Граничні витрати $\boldsymbol{M(x)}$ на виробництво x одиниць продукції згідно з поняттям похідної будемо визначати як

$$M(x) = C'(x). \tag{4.57}$$

Оптимальним значенням виробництва для виробника є те значення x одиниць продукції, при якому прибуток $P(x)$ є найбільшим. Тому для визначення величини оптимального значення виробництва, необхідно розв'язати задачу про найбільше значення функції (см. п. 4.4.4).

Приклад 4.46. Виробнича фірма мінімізує середні витрати, які в результаті дорівнюють 50 грн./один. Чому при цьому дорівнюють граничні витрати?

Розв'язання: З (4.56) маємо: $C(x) = A(x) \cdot x = 50x.$ За формулою (4.57) граничні витрати є похідна від функції витрат. Після її обчислення маємо:

$$M(x) = C'(x) = 50.$$

Отже, граничні витрати дорівнюють 50 грн./один.

Приклад 4.47. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 19$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 22 + 7x + x^3$.

Розв'язання: За формулою (4.55) прибуток визначається як

$$P(x) = D(x) - C(x) = 19x - 22 - 7x - x^3 = 12x - 22 - x^3.$$

Оптимальне значення випуску – значення, при якому прибуток є найбільшим. Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Знайдемо похідну:

$$P'(x) = 12 - 3x^2.$$

Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$. Тобто $12 - 3x^2 = 0$. Критичні точки: $x_{1,2} = \pm 2$. За умовою задачи зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже $x_0 = 2$. В цій точці функція набуває максимуму (за результатами дослідження знаків похідної), тому оптимальне значення випуску дорівнює $x_0 = 2$.

Приклад 4.48. Доход від виробництва продукції з використанням x одиниць ресурсів дорівнює $D(x) = 80\sqrt{x}$. Вартість одиниці ресурсів складає 4 умовних одиниці. Яку кількість ресурсів треба придбати, щоб прибуток був найбільшим?

Розв'язання: За формулою (4.55) прибуток визначається як

$$P(x) = D(x) - C(x) = 80\sqrt{x} - 4x.$$

Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Для цього обчислимо похідну: $P'(x) = \frac{40}{\sqrt{x}} - 4$.

Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$. Тобто, $\frac{40}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{40-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, $\sqrt{x} = 10$. Критична точка: $x = 100$. Після з'ясування знаків похідної в кожному з часткових інтервалів, встановимо, що в цій точці функція набуває максимуму. Отже необхідно придбати 100 одиниць ресурсів, щоб прибуток був найбільшим.

Приклад 4.49. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю $p(x) = 2 + \frac{5}{3}\sqrt{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 (за умови, що весь вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд: $C(x) = 17 - 4x + \frac{x^2}{2}$.

Розв'язання: За формулою (4.55) прибуток визначається як

$$P(x) = D(x) - C(x) = 2x + \frac{5}{3}x\sqrt{x} - 17 + 4x - \frac{x^2}{2} =$$

$$= 6x + \frac{5}{3}x\sqrt{x} - 17 - \frac{x^2}{2}.$$

Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Для цього обчислимо похідну:

$$P'(x) = 6 + \frac{5}{2}\sqrt{x} - x.$$

Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$. Тобто, $6 + \frac{5}{2}\sqrt{x} - x = 0$.

Щоб розв'язати це рівняння, зробимо заміну:

$$\sqrt{x} = t; \quad 2t^2 - 5t - 12 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Зрозуміло, що нас цікавить лише додатні значення t, тому $x = t^2 = 16$. Отже оптимальне значення випуску $x_0 = 16$.

Приклад 4.50. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, при цьому функція витрат має вигляд $C(x) = 10 + 2x + \frac{5}{2}x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється нарівні $p = 37$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

Розв'язання: За формулою (4.56) функція середніх витрат виробництва має вигляд

$$A(x) = \frac{10}{x} + 2 + \frac{5}{2}x.$$

Знайдемо мінімальне значення цієї функції:

$$A'(x) = -\frac{10}{x^2} + \frac{5}{2}; \qquad A'(x) = 0; \qquad \frac{-20x^2+5}{2x^2} = 0;$$

$$x^2 = 4; \quad x = \pm 2.$$

Отже $x_0 = 2$. Граничні витрати (4.57):

$$M(x) = C'(x) = 2 + 5x.$$

Відомо, що прибуток (4.55) визначається як:

$$P(x) = D(x) - C(x) = 37x - C(x).$$

Продиференцюємо даний вираз:

$$P'(x) = 37 - C'(x) = 37 - M(x) = 37 - 2 - 5x = 35 - 5x.$$

Знайдемо критичну точку:

$$P'(x) = 0; \quad 35 - 5x = 0; \qquad x = 7.$$

Отже, оптимальне значення кількості товару $x_{\text{опт.}} = 7$. З цього прямує, що необхідно збільшити виробництво на 5 одиниць ($\Delta x = x_{\text{опт.}} - x_0$).

З'ясуємо середні витрати виробництво

$A(2) = \frac{10+4+10}{2} = 12;$

$A(7) = \frac{10+14+\frac{5}{2}\cdot 49}{7} = \frac{293}{14};$

$\Delta A = \frac{293}{14} - 12 = \frac{125}{14}.$

Отже, середні витрати зміняться на $\frac{125}{14}$.

Розділ 5. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1. ПЕРВІСНА

У попередніх розділах, коли вивчали диференціювання, розв'язували наступну задачу: як знайти похідну даної функції? Зараз поставимо перед собою обернену задачу: як знайти функцію, якщо відома її похідна?

<u>Визначення 5.1.</u> Первісною від функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна від якої дорівнює даній функції:

$$F'(x) = f(x). \tag{5.1}$$

Приклад 5.1. Знайти первісну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання: За визначенням 5.1 функція $\frac{1}{4}x^4$ є первісною, тому що $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$. Але й $\frac{1}{4}x^4 - 17$ і $\frac{1}{4}x^4 + 5$ теж є первісними, тому що $\left(\frac{1}{4}x^4 - 17\right)' = x^3$; $\left(\frac{1}{4}x^4 + 5\right)' = x^3$.

<u>Теорема 5.1.</u> Будь-яка неперервна функція має несчислену множину первісних, причому будь-які дві з них відрізняються на сталу величину.

Доведення:

Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ - дві первісні функції $f(x)$. За визначенням первісної маємо:

$$F_1'(x) = f(x) \quad \text{і} \quad F_2'(x) = f(x).$$

Позначимо $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$.

Візьмемо похідну від обох частин:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \varphi'(x) \quad \text{або} \quad f(x) - f(x) = \varphi'(x),$$

$$\text{або} \quad \varphi'(x) = 0.$$

З останньої тотожності прямує, що $\varphi(x) = C$ - стала величина.

Визначення 5.2. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначається як $\int f(x)dx$. Функцію $f(x)$ називають ***підінтегральною функцію***, вираз $f(x)dx$ - ***підінтегральним виразом***, знак $\int$ – ***знаком інтегралу***.

Визначення 5.3. Знаходження всіх первісних функції називається ***невизначеним інтегруванням*** (далі просто ***інтегруванням***) цієї функції.

За визначенням 5.1 маємо ***основні властивості невизначного інтегралу***:

- $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
- $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
- $\int df(x) = f(x) + C$.

5.2. ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХІНТЕГРАЛІВ. ПРОСТІШІ ПРИЙОМИ ІНТЕГРУВАННЯ

В таблиці 5.1 безпосередньо зведені формули, необхідні для інтегрування. Ці формули випливають з формул диференціювання основних елементарних функцій. Будь-яка з наведених формул легко перевіряється диференціюванням.

Зауваження. В таблиці 5.1 буква u може позначати як незалежну змінну x, так і неперервну диференційовану функцію $u = u(x)$ аргументу x. Справедливість цього зауваження ми доведемо пізніше.

Таблиця 5.1. Основна таблиця інтегралів

1	$\int du = u + C$
2	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
3	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
4	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$
5	$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$
6	$\int e^u du = e^u + C$
7	$\int \frac{du}{u} = lnu + C$
8	$\int cosu = sinu + C$
9	$\int sinu = -cosu + C$
10	$\int \frac{du}{cos^2u} = tgu + C$

11	$\int \frac{du}{sin^2u} = -ctgu + C$
12	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctgu + C$
13	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$
14	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$

<u>Теорема 5.2.</u> Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів:

$$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx. \qquad (5.2)$$

Доведення: Нехай функція $f(x)$ представлена у вигляді двох доданків, кожен з яких є функцією незалежної змінної: $f(x) = u + v$.

Похідна від лівої частини рівності (5.2) за визначенням похідної дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int (u+v)dx\right)' = u + v.$$

Диференцюємо праву частину рівності (5.2), отримаємо

$$\left(\int udx + \int vdx\right)' = \left(\int udx\right)' + \left(\int vdx\right)' = u + v.$$

Ми отримали той же самий вираз. Теорема доведена.

<u>Теорема 5.3.</u> Константу можна виносити за знак інтегралу:

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx. \qquad (5.3)$$

Доведення: Диференцюємо обидві частини рівності (5.3):

$(\int Cf(x)dx)' = Cf(x); \quad (C\int f(x)dx)' = C(\int f(x)dx)' = Cf(x).$

що і потрібно було довести.

<u>Теорема 5.4</u> (про інваріантність формул інтегрування). Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо замінити незалежну змінну будь-якою диференційованою функцією від незалежної змінної, тобто якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{то} \qquad \int f(u)du = F(u) + C.$$

Доведення: З рівності $\int f(x)dx = F(x) + C$ за визначенням первісної прямує $F'(x) = f(x)$.

Розглянемо функцію $F(u) = F[u(x)]$. Її диференціал буде мати вигляд

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

Звідси

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$$

що і потрібно було довести. Цією теоремою ми довели зауваження до таблиці невизначних інтегралів. Це правило є дуже важливим, тому що значно розширює таблицю інтегралів. Виявляється, що таблиця є справедливою незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною, чи будь-якою диференційованою функцією від неї.

<u>Теорема 5.5.</u> Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то справедливі формули:

а) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C;$ (5.4)

б) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C;$ (5.5)

в) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$ (5.6)

Доведення: Останні рівності доведемо диференціюванням, з урахуванням доведених теорем:

а) $(\int f(ax)dx)' = \left(\int f(ax)d\left(\frac{a}{a}x\right)\right)' = \left(\frac{1}{a}\int f(ax)d(ax)\right)' =$

$= [u = ax] = \frac{1}{a}(\int f(u)du)' = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C;$

б) $(\int f(x+b)dx)' = (\int f(x+b)d(x+b))' = [u = x+b] =$

$= (\int f(u)du)' = F(u) + C = F(x+b) + C;$

в) $(\int f(ax+b)dx)' = \left(\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)\right)' =$

$= [u = ax+b] = \frac{1}{a}(\int f(u)du)' = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Теорему доведено.

Проілюструємо застосування наведених теорем при безпосередньому інтегруванні.

Приклад 5.2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int(3x^5+8)(6x-7x^3)dx.$$

Розв'язання:

$\int(3x^5+8)(6x-7x^3)dx = \int(18x^6+48x-21x^8-56x^3)dx =$

$= 18\int x^6\,dx + 48\int xdx - 21\int x^8\,dx - 56\int x^3\,dx =$

$= \frac{18}{7}x^7 + 24x^2 - \frac{7}{3}x^9 - 14x^4 + C.$

Приклад 5.3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \left(2e^x + 7x^5 - \frac{6}{sin^2 x} + \frac{13}{x}\right) dx.$$

Розв'язання:

$$\int \left(2e^x + 7x^5 - \frac{6}{sin^2 x} - \frac{13}{x}\right) dx = 2\int e^x dx + 7\int x^5 dx -$$

$$-6\int \frac{dx}{sin^2 x} - 13\int \frac{dx}{x} = 2e^x + \frac{7}{6}x^6 + 7ctgx - 13lnx + C.$$

Приклад 5.4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{2x\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{2x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}lnx + 3\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + C.$$

Приклад 5.5. Знайти невизначений інтеграл $\int tg^2 x\, dx$.

Розв'язання:

$$\int tg^2 x\, dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{1-cos^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{cos^2 x} - \int dx =$$

$$= tgx - x + C.$$

5.3. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

Познайомимося з найпоширенішим методом інтегрування – ***методом заміни змінної***. Диференціювати елементарні функції за допомогою таблиці інтегралів не складно. Для вдалого використання результатів теореми 5.5 необхідні великі навички, щоб швидко звести інтеграл до табличного. Але й теорема 5.5 не охоплює усіх можливих ситуацій. Спробуємо навчитися встановлювати підстановку (в кожному окремому випадку), за допомогою якої інтеграл може бути зведений до табличного. Допоможе нам в цьому наступна теорема.

<u>Теорема 5.6.</u> Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

а функція $x = \varphi(t)$, то функція $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ має первісну $F(\varphi(t))$ і

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)}. \qquad (5.7)$$

Доведення: За визначенням похідної

$$F'(x) = f(x).$$

За правилом диференціювання складної функції маємо

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

З цього прямує, що функція $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ має первісну $F(\varphi(t))$. Звідси за визначенням інтегралу маємо

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C.$$

Теорему доведено.

Приклад 5.6. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin(4x-3)dx.$$

Розв'язання: $\int sin(4x-3)dx = \begin{bmatrix} u = 4x-3 \\ du = 4dx \\ dx = \frac{1}{4}du \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{4}\int sinudu = -\frac{1}{4}cosu + C = -\frac{1}{4}cos(4x-3) + C.$$

Зауважимо, що розв'язати цю задачу можна і за формулою (5.6).

Приклад 5.7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{7x^2+4}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{7x^2+4} = \begin{bmatrix} u^2 = 7x^2 \\ u = \sqrt{7}x \\ du = \sqrt{7}dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{7}}du \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{du}{u^2+4} =$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2\sqrt{7}} arctg \frac{\sqrt{7}x}{2} + C.$

Приклад 5.8. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

Розв'язання: $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}} = \begin{bmatrix} u = 8 - 3x^2 \\ du = -6xdx \\ xdx = -\frac{1}{6}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \int \frac{du}{\sqrt{u}} =$

$= -\frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{8 - 3x^2} + C.$

Приклад 5.9. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} arcsin 5x}.$$

Розв'язання: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} arccos^4 5x} = \begin{bmatrix} u = arccos 5x \\ du = -\frac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}} \\ \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = -\frac{1}{5}du \end{bmatrix} =$

$= -\frac{1}{5} \int \frac{du}{u^4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-3}}{(-3)} + C = \frac{1}{15 arccos^3 5x} + C.$

Приклад 5.10. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{4x - 7xlnx}.$$

Розв'язання: Спочатку спростимо цей вираз, винесемо за дужки x і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{4x-7xlnx} = \int \frac{dx}{x(4-7lnx)} = \begin{bmatrix} u = 4 - 7lnx \\ du = -7\frac{dx}{x} \\ \frac{dx}{x} = -\frac{1}{7}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\frac{1}{7}lnu + C == -\frac{1}{7}ln(4 - 7lnx) + C.$$

5.4. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

5.4.1. Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

При інтегруванні запропонованих функцій за допомогою формул (12-15) таблиці 5.1 нам заважає доданок, який містить першу степінь незалежної змінної. Зрозуміло, що для того, щоб скористатися основною таблицею інтегралів, нам необхідно виділити повний квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2,$$

де $k^2 = c - \frac{b^2}{4a}$. Знак плюс або мінус береться у залежності від того, чи буде другий доданок додатним або від'ємним. Зробимо заміну змінної $t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. За формулою (5.7) отримаємо

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\pm t^2 \pm k^2} \quad \text{або} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 \pm k^2}}.$$

Зауважимо, що перед t^2 стоїть знак плюс, якщо $a > 0$, і знак мінус, якщо $a < 0$. Отримані інтеграли є табличними (формули (12-15) таблиці 5.1). Після інтегрування повертаємося до початкової змінної.

Не для всіх читачів процедура виділення повного квадрату є простою, а запам'ятовувати отриману формулу не варто. При розв'язанні наступних прикладів, ми приведемо простіший, прийом виділення повного квадрату. Для користування їм потрібно лише згадати добре відомі формули «квадрат суми» або «квадрат різниці»: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Приклад 5.11. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+15}$.

Розв'язання: Виділимо повний квадрат у виразі, який стоїть в знаменнику підінтегральної функції. Для цього підпишемо під квадратним тричленом (доданок під доданком) формулу «квадрат різниці» (обираємо формулу за знаком доданку з першим степенем незалежної змінної). Поставимо у відповідність перші два доданки, звідки знайдемо a і b. Додамо та віднімемо в початковому виразі величину, яка дорівнює b^2 (згідно з формулою). Отже, маємо:

$$x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 15 = (x-3)^2 + 6;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$$

$$\begin{bmatrix} a^2 = x^2 & 2ab = 6x \\ a = x & 2xb = 6x \\ & b = 3 \end{bmatrix}.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+15} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+6} = \begin{bmatrix} u = x-3 \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2+6} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{x-3}{\sqrt{6}} + C.$$

Приклад 5.12. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$.

Розв'язання: Виділимо повний квадрат у виразі, який стоїть під коренем в знаменнику підінтегральної функції. Для цього потрібно зробити деякі перетворення, а саме:

- переписати доданки в порядку спадання степеня незалежної змінної;
- винести за дужки знак мінус:
- виділити повний квадрат у виразі, який опинився у дужках, за допомогою формули «квадрат суми»;
- змінити знак кожного доданку отриманого виразу на протилежний.

Отже маємо:

$$3-4x-x^2=-(x^2+4x-3)=7-(x+2)^2.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{7-(x+2)^2}}=\begin{bmatrix}u=x+2\\ du=dx\end{bmatrix}=\int\frac{du}{\sqrt{7-u^2}}=$$

$$=arcsin\frac{u}{\sqrt{7}}+C=arcsin\frac{x+2}{\sqrt{7}}+C.$$

5.4.2. Інтеграли, які мають вигляд $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ або $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Розглянемо інтеграли більш загального вигляду. Заважимо, що в чисельнику розташовано многочлен першого порядку, а в знаменнику (або в підкореневому виразі знаменника) – многочлен другого порядку. За правилами диференціювання, похідна від многочлену другого порядку – многочлен першого порядку. Тобто за структурою чисельник підінтегрального виразу повторює диференціал знаменника (або підкореневого виразу знаменника), відрізнятися ці вирази можуть лише коефіцієнтами.

Приведемо методику інтегрування таких інтегралів на прикладі інтегралу $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$. Візмемо диференціал знаменника:

$$d(ax^2+bx+c) = (2ax+b)dx.$$

Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо тотожні перетворення чисельника:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

Отриманий інтеграл представимо у вигляді двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \frac{A\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

перший з яких методом заміни змінної зводиться до інтегралу $\int \frac{du}{u}$ (формула 7 таблиці 5.1), а другий – до вже розглянутого вище інтегралу $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Зауважимо, що інтеграли $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ знаходяться аналогічно. Різниця полягає лише у виборі формул інтегрування. Перший з отриманих інтегралів методом заміни змінної зводиться до інтегралу вигляду $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (формула 3 таблиці 5.1), а другий – до вже розглянутого вище інтегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Приклад 5.13. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}dx$.

Розв'язання: Візьмемо диференціал знаменника

$$d(x^2+10x-3)=(2x+10)dx.$$

Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо у ньому тотожні перетворення:

$$\int\frac{x-4}{x^2+10x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-8}{x^2+10x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+10-10-8}{x^2+10x-3}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+10}{x^2+10x-3}dx-\frac{18}{2}\int\frac{dx}{x^2+10x-3}=I_1+I_2.$$

Знайдемо отримані інтеграли:

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x+10}{x^2+10x-3}dx=\begin{bmatrix}u=x^2+10x-3\\du=(2x+10)dx\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{2}lnu+C=\frac{1}{2}ln|x^2+10x-3|+C;$$

$$I_2=-9\int\frac{dx}{x^2+10x-3}=-9\int\frac{dx}{(x+5)^2-28}=\begin{bmatrix}u=x+5\\du=dx\end{bmatrix}=$$

$$=-9\int\frac{du}{u^2-28}=-9\cdot\frac{1}{2\cdot2\sqrt{7}}ln\left|\frac{u-2\sqrt{7}}{u+2\sqrt{7}}\right|+C=-\frac{9}{4\sqrt{7}}ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{7}}{x+5+2\sqrt{7}}\right|+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int\frac{x-4}{x^2+10x-3}dx=\frac{1}{2}ln|x^2+10x-3|-\frac{9}{4\sqrt{7}}ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{7}}{x+5+2\sqrt{7}}\right|+C.$$

5.5. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Розглянемо методику інтегрування одного з найважливіших класів елементарних функцій – ***раціональних функцій***.

Будь-яка елементарна функція $R(x)$ може бути представлена у вигляді дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ - многочлени:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо, що якщо максимальний степінь чисельника менший за максимальний степінь знаменника $(m < n)$, дріб називається ***правильним***, якщо максимальний степінь чисельника більший або дорівнює максимальному степеню знаменника $(m \geq n)$, дріб називається ***неправильним***. Якщо $m \geq n$, то виконавши операцію ділення многочленів, будь-який неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлену (ціла частина) і правильного дробу (отриманий многочлен – результат ділення; чисельник отриманого правильного дробу – залишок від ділення):

$$R(x) = N(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо читачеві процедуру ділення многочленів.

Приклад 5.14. Знайти цілу частину і залишок алгебраїчного дробу $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання: Поділимо чисельник на знаменник

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ \underline{x^4 + x^3 + x^2} \end{array} & \frac{x^2+x+1}{x^2+2x-1} \\
\qquad -\begin{array}{l} 2x^3 + x^2 + x \\ \underline{2x^3 + 2x^2 + 2x} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{l} -x^2 - x + 1 \\ \underline{-x^2 - x - 1} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -2. &
\end{array}$$

Отже, $N(x) = x^2 + 2x - 1$ - ціла частина, число (-2) – залишок.

Остаточно маємо: $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1} = x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{x^2+x+1}$.

Інтегрування многочлену $N(x)$ не складає труднощів, проблема полягає в інтегруванні правильного раціонального дробу. Приведемо без доведення наступну теорему.

Теорема 5.7. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильний раціональний дріб, де $P(x)$ і $Q(x)$ - многочлени з дійсними коефіцієнтами. Якщо

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots$$
$$\cdot \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s} \qquad (5.8)$$

де a_i – дійсні корені многочлену $Q(x)$ (які попарно відрізняються) кратності α_i, $i = 1,2,\dots,r$; $x^2 + p_jx + q_j = \left(x - z_j\right)\left(x - \overline{z_j}\right)$ – комплексно спряжені корені многочлену $Q(x)$ (які попарно відрізняються) кратності β_j, $j = 1,2,\dots,s$, то існують дійсні числа $A_i^{(\alpha)}$, $i = 1,2,\dots,r$, $\alpha = 1,2,\dots,\alpha_i$; $B_j^{(\beta)}$, $C_j^{(\beta)}$ $j = 1,2,\dots,s$, $\beta = 1,2,\dots,\beta_j$, такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)} + \dots +$$
$$+ \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_1}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{(x-a_1)} + \dots +$$
$$+ \frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \frac{B_1^{(2)}x+C_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}} + \dots + \frac{B_1^{(\beta_1)}x+C_1^{(\beta_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \dots +$$
$$+ \frac{B_s^{(1)}x+C_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \frac{B_s^{(2)}x+C_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}} + \dots + \frac{B_s^{(\beta_s)}x+C_s^{(\beta_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)}. \qquad (5.9)$$

Тобто будь-який правильний раціональний дріб може бути розкладений на суму елементарних дробів.

Запам'ятати цю схему в загальному вигляді важко, тому розглянемо окремі ситуації, які нас цікавлять у рамках курсу, що вивчається.

5.5.1. Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні різні корені:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n). \tag{5.10}$$

В такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дробі

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \dots + \frac{C}{x-a_n}. \tag{5.11}$$

Інтеграл від такого дробу зводиться до

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \int \frac{dx}{x-a_1} + B \int \frac{dx}{x-a_2} + \dots + C \int \frac{dx}{x-a_n} =$$

$$= A\, ln|x - a_1| + B\, ln|x - a_2| + \dots + C\, ln|x - a_n|$$

Приклад 5.15. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$$

Розв'язання: Раціональний дріб неправильний. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^3-5x^2+6x \\ \underline{x^3 - 5x^2 + 6x} & \overline{1} \\ 5x^2 - 6x + 1. & \end{array}$$

Отже, початковий інтеграл набуває вигляду

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int \left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right)dx = \int dx + \int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$$

З'ясуємо корені знаменника:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3).$$

Зрозуміло, що корені знаменника дійсні і різні: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Розкладемо раціональний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C. Для цього приведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)}.$$

Знаменники ліворуч та праворуч однакові, тому достатньо дорівняти чисельники:

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2).$$

Взагалі для знаходження невідомих коефіцієнтів користуються методом невизначених коефіцієнтів, при якому дорівнюються коефіцієнти ліворуч та праворуч при однакових степенях x. До цього метода ми ще звернемося пізніше, а у випадку дійсних і різних коефіцієнтів знаменника набагато швидше знаходяться коефіцієнти при підстановці відомих коренів знаменника. Нехай x послідовно дорівнює $0, 2, 3$. Маємо:

$\underline{x = 0} \mapsto \quad 1 = 6A; \qquad A = \frac{1}{6};$

$\underline{x = 2} \mapsto \quad 20 - 12 + 1 = -2B; \qquad B = -\frac{9}{2};$

$\underline{x = 3} \mapsto \qquad 45 - 18 + 1 = 3C; \qquad C = \frac{28}{3}.$

Початковий інтеграл дорівнює сумі чотирьох інтегралів з відповідними коефіцієнтами. Обчислимо останні:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx = \int dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= x + \frac{1}{6} ln|x| - \frac{9}{2} ln|x-2| + \frac{28}{3} ln|x-3| + C.$$

5.5.2. Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_n)^{\alpha_n}. \qquad (5.12)$$

В такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дробі наступним чином:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{B}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{C}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}} + \dots + \frac{D}{x-a_1} + \dots + \frac{E}{x-a_n}. \qquad (5.13)$$

Отже, зрозуміло, що кореню a_i кратності α_i відповідає α доданків; кожен наступний дріб має степінь на одиницю меншу від попереднього і так до першого. Інтегрування отриманих дробів виконується за формулами 2, 7 таблиці 5.1. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 5.16. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} dx.$$

Розв'язання: Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника і розкладемо його на множники. Для цього винесемо спільний множник за дужки:

$$x^3 + 5x^2 = x^2(x + 5).$$

Отже, знаменник має корень $x = 0$ кратності 2; і корень $x = -5$ кратності 1.

Розкладемо дріб на простіші: $\frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5}$.

Приведемо дробі до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$3x^2 + 30x - 25 = A(x + 5) + Bx(x + 5) + Cx^2.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Для цього підставимо відомі нам корені до отриманої тотожності. Відомих нам різних коренів два, а невідомих коефіцієнтів – три. Розв'язати цю проблему можна за допомогою наступної «хитрощі»: підставимо у тотожність будь-яке число; отримаємо вираз, який містить всі коефіцієнти; підставимо вже відомі два коефіцієнта; знайдемо звідси невідомий третій:

$\underline{x = 0} \mapsto \quad -25 = 5A; \qquad A = -5;$

$\underline{x = -5} \mapsto \quad 75 - 150 - 25 = 5C; \qquad C = -4;$

$\underline{x = 1} \mapsto \quad 3 + 30 - 25 = 6A + 6B + C;$

$$8 = -30 + 6B - 4; \qquad B = 7.$$

Перепишемо початковий інтеграл у вигляді:

$$\int \frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} dx = -5 \int \frac{dx}{x^2} + 7 \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x+5} =$$

$$= \frac{5}{x} + 7ln|x| - 4ln|x + 5| + C.$$

5.5.3. Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має комплексні різні корені:

$$Q(x) = (x^2 + p_1 x + q_1) \dots (x^2 + p_s x + q_s). \qquad (5.14)$$

В такому випадку раціональний дріб набуває вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{Dx+E}{x^2+p_sx+q_s}. \qquad (5.15)$$

Обчисленню інтегралів такого вигляду ми приділили достатньо уваги у розділі 5.4. Тому відразу звернемося до прикладів.

Приклад 5.17. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)} dx.$$

Розв'язання: Раціональний дріб правильний. З'ясуємо корені знаменника. Знаменник має один дійсний корень $x = 4$ і два комплексних, які знаходяться з розв'язання рівняння $x^2 = -9$ (розв'язання таких рівнянь виходить за межи курсу, що вивчається). Тому при розкладанні раціонального дробу звернемося до формул (5.11) і (5.15):

$$\frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2+9}.$$

Приведемо дробі до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$8x^2 - 22x + 35 = A(x^2+9) + (Bx+C)(x-4).$$

Лише один невідомий коефіцієнт ми можемо знайти за вивченим прийомом:

$\underline{x = 4}$: $128 - 88 + 35 = 25A$; $A = 3$.

Настав час познайомитися з методом невизначених коефіцієнтів. Розкриємо дужки у правій частині тотожності і дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях ліворуч і праворуч, отримаємо систему з трьох рівнянь з трьома невідомими. Розв'язати її можна будь-яким методом, вивченим у розділі 1.3, а можна підставити знайдений коефіцієнт у перше і друге рівняння. Отже маємо

$$8x^2 - 22x + 35 = Ax^2 + 9A + Bx^2 + Cx - 4Bx - 4C;$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 8 = A + B \\ x & -22 = C - 4B \\ x^0 & 35 = 9A - 4C \end{array} \qquad \begin{array}{l} B = 8 - A = 8 - 3 = 5 \\ C = 4B - 22 = 20 - 22 = -2 \\ \end{array}$$

Знайдемо інтеграл

$$\int \frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)}dx = 3\int \frac{dx}{x-4} + \int \frac{5x-2}{x^2+9}dx = 3\int \frac{dx}{x-4} + 5\int \frac{xdx}{x^2+9} -$$

$$-2\int \frac{dx}{x^2+9} = 3\int \frac{dx}{x-4} + \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} - 2\int \frac{dx}{x^2+9} =$$

$$= 3ln|x-4| + \frac{5}{2}ln|x^2+9| - \frac{2}{3}arctg\frac{x}{3} + C.$$

Приклад 5.18. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}dx.$$

Розв'язання: Раціональний дріб правильний. З'ясуємо корені знаменника. За формулою «різниця кубів» маємо

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Перший множник дає дійсний корінь $x = 1$, а другий – неповний квадрат - має від'ємний дискримінант, тобто корені комплексні. За формулами (5.11) і (5.15) маємо розклад раціонального дробу:

$$\frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Приведемо дробі до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$5x^2-6x+7=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти за описаною вище схемою:

$\underline{x=1}$: $\quad 6=3A; \quad A=2;$

$5x^2-6x+7=Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C;$

$$\begin{array}{r|l}x^2 & \;\;5=A+B \qquad\qquad B=5-A=5-2=3\\ x & -6=A-B+C;\\ x^0 & \;\;7=A-C \qquad\qquad C=A-7=2-7=5.\end{array}$$

Шуканий інтеграл набуває вигляду

$$\int\frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}dx=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{3x-5}{x^2+x+1}dx=2\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{x-\frac{5}{3}}{x^2+x+1}dx=$$

$$=2\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{2x-\frac{10}{3}}{x^2+x+1}dx=2\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{2x+1-1-\frac{10}{3}}{x^2+x+1}dx=$$

$$=2\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{13}{3}\right)\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Обчислимо кожен з отриманих інтегралів:

$$I_1=2\int\frac{dx}{x-1}=2ln|x-1|+C;$$

$$I_2=\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\begin{bmatrix}u=x^2+x+1\\ du=(2x+1)dx\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{3}{2}ln|u|+C=$$

$$=\frac{3}{2}ln|x^2+x+1|+C;$$

$$I_3 = -\frac{13}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{13}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \begin{bmatrix} u = x+\frac{1}{2} \\ du = dx \end{bmatrix} = -\frac{13}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = -\frac{13}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Остаточно маємо $\int\frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}dx =$

$$= 2ln|x-1| + \frac{3}{2}ln|x^2+x+1| - \frac{13}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Зауваження. Інтегрування четвертого типу раціональних дробів, а саме дробів, які мають кратні комплксні корені, виходить за рамки курсу, що вивчається.

5.6. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ - неперервні диференційовані функції незалежної змінної. Диференціал їх добутку має вигляд

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Звідси $$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруємо обидві частини отриманої рівності, маємо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

або $$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (5.16)$$

Суть методу інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ якось може бути представлений у вигляді добутку множників u і dv. Далі знаходимо v по відомому виразу dv шляхом інтегрування і потім беремо інтеграл $\int vdu$. Цей метод застосовують, якщо обидва ці інтеграли легко знаходяться, а заданий інтеграл безпосередньо знайти неможливо.

Метод інтегрування частинами надзвичайно важливий, він охоплює інтегрування великого класу функцій і має практичне застосування при розв'язанні прикладних задач.

Допоможемо читачеві зорієнтуватися у великому просторі запропонованих функцій за допомогою наступної підказки. Приведемо найпоширеніші ситуації, коли потрібно звертатися до метода інтегрування частинами. Але потрібно пам'ятати, що наведений перелік функцій ні в якому разі не охоплює всіх можливих підінтегральних виразів, а пропонує лише типові.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли типу:

- $$\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \qquad \big(u = P_n(x)\big);$$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

- $$\int P_n(x) a^x dx, \qquad \big(u = P_n(x)\big);$$

- $$\int \log_a(ax+b)\, dx, \qquad (u = \log_a(ax+b));$$

- $$\int P_n(x) \log_a(ax+b) dx; \quad (u = \log_a(ax+b));$$

- $$\int \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \qquad \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$$

- $\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx;$

$$\left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$$

- і багато-багато інших…

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів з даного переліку інтегрується частинами n разів; тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степіню многочлена $P_n(x)$.

Приклад 5.19. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (8x-3)e^{5x}dx.$$

Розв'язання: За формулою (5.16) маємо

$$\int (8x-3)e^{5x}dx = \begin{bmatrix} u = 8x-3 & dv = e^{5x}dx \\ du = 8dx & v = \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}(8x-3)e^{5x} - \frac{8}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}(8x-3)e^{5x} - \frac{8}{25}e^{5x} + C =$$

$$= \frac{1}{25}(40x-15-8)e^{5x} + C = \frac{1}{25}(40x-23)e^{5x} + C.$$

Приклад 5.20. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 cos4xdx.$$

Розв'язання: Скористаємося формулою (5.16) і згадаємо зауваження. Маємо многочлен другого ступеня, отже інтегрувати частинами потрібно двічі:

$$\int x^2 cos4xdx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = cos4xdx \\ du = 2xdx & v = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x - \frac{1}{2}\int xsin4xdx = \begin{bmatrix} u = x & dv = sin4xdx \\ du = dx & v = -\frac{1}{4}cos4x = \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xcos4x + \frac{1}{4}\int cos4xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x + \frac{1}{8}xcos4x - \frac{1}{32}sin4x + C.$$

Приклад 5.21. Знайти невизначений інтеграл

$$\int arctg(x-1)dx.$$

Розв'язання: За формулою (5.16) маємо

$$\int arctg(x-1)dx = \begin{bmatrix} u = arctg(x-1) & dv = dx \\ du = \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \frac{dx}{x^2-2x+2} & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\, arctg(x-1) - \int \frac{xdx}{x^2-2x+2} = x\, arctg(x-1) - I.$$

Отримали інтеграл того типу, який докладно розглянули у п.5.4.2. Виконаємо потрібні перетворення:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+2} + \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}ln(x^2-2x+2) + arctg(x-1) + C.$$

Остаточно маємо:

$$\int arctg(x-1)dx = x\, arctg(x-1) - \frac{1}{2}ln(x^2-2x+2) -$$
$$-arctg(x-1) + C.$$

Приклад 5.22. Знайти невизначений інтеграл

$$\int xln(2x+3)dx.$$

Розв'язання: За формулою (5.16) маємо

$$\int xln(2x+3)dx = \begin{bmatrix} u = ln(2x+3) & dv = xdx \\ du = \frac{2dx}{2x+3} & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} ln(2x+3) - \int \frac{x^2 dx}{2x+3} = \frac{x^2}{2} ln(2x+3) - I.$$

Отримали інтеграл I від неправильного раціонального дробу. Необхідно виділити цілу частину. Виконаємо операцію ділення многочленів:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^2 \\ \underline{x^2 + \frac{3}{2}x} \end{array} & \begin{array}{l} 2x+3 \\ \hline \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \end{array} \\ -\begin{array}{r} -\frac{3}{2}x \\ \underline{-\frac{3}{2}x - \frac{9}{4}} \end{array} & \\ \frac{9}{4} & \end{array}$$

Підставимо в інтеграл: $I = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{2x+3} \right) dx =$

$$= \frac{1}{2}\int xdx - \frac{3}{4}\int dx + \frac{9}{4}\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8} ln(2x+3) + C.$$

5.7. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

5.7.1. Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R(sinx, cosx)dx}$

Розглянемо інтеграл $\int R(sinx, cosx)dx$. Спробуємо довести, що універсальна тригонометрична підстановка

$$u = tg\frac{x}{2}, \qquad -\pi < x < \pi,$$

зводить його до інтегралу від раціональної дробі. Виконаємо необхідні перетворення:

$$sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}} : \frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2};$$

$$cosx = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = \frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}} : \frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

$$x = 2arctgu; \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2}. \tag{5.17}$$

Звідси

$$\int R(sinx, cosx)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Тобто ми отримали інтеграл від дробово-раціональної функції (см. Розділ 5.5). Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 5.23. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{dx}{5-4sinx+3cosx}.$$

Розв'язання: Використовуємо формули (5.17).

$$\int\frac{dx}{5-4sinx+3cosx} = \int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{5-\frac{8u}{1+u^2}+3\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int\frac{du}{5+5u^2-8u+3-3u^2} =$$

$$= \int\frac{du}{u^2-4u+4} = \int\frac{du}{(u-2)^2} = -\frac{1}{u-2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2} + C.$$

Зауваження. За допомогою універсальної тригонометричної підстановки можна обчислити будь-який інтеграл розглянутого типу. Але з практичної точки зору в деяких випадках, щоб запобігти зайвих обчислень, можна скористатися іншими підстановками, а саме:

- в інтегралі типу $\int R(sinx)cosxdx$

підстановка

$$\begin{aligned} u &= sinx \\ du &= cosxdx \end{aligned} \tag{5.18}$$

зводить його до інтегралу типу $\int R(u)du$;

- в інтеграла типу $\int R(cosx)sinxdx$

підстановка

$$\begin{aligned} u &= cosx \\ du &= -sinxdx \end{aligned} \tag{5.19}$$

зводить його до інтегралу типу $-\int R(u)du$;

- якщо підінтегральна функція є лише функцією від tgx, тобто $\int R(tgx)dx$,

то підстановка

$$\begin{aligned} u &= tgx \\ x &= arctgu \\ dx &= \frac{du}{1+u^2} \end{aligned} \tag{5.20}$$

зводить його до інтегралу від раціональної функції $\int R(u)\frac{du}{1+u^2}$;

- якщо підінтегральна функція типу $R(sinx, cosx)$, але і $sinx$ і $cosx$ знаходяться у парних степенях,

то заміна (5.20) приводить до

$$\begin{aligned} sin^2x &= \frac{tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{u^2}{1+u^2}, \\ cos^2x &= \frac{1}{1+tg^2x} = \frac{1}{1+u^2}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Цей прийом запобігає обчисленню інтегралів від раціональних функцій, які мають кратні комплексні корені (ця тема не входить у курс, який вивчається).

Приклад 5.24. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{sinxdx}{(1-cosx)^2}.$$

Розв'язання: Скористаємося підстановкою (5.19):

$$\int \frac{sinxdx}{(1-cosx)^2} = \begin{bmatrix} u = cosx \\ du = -sinxdx \end{bmatrix} = -\int \frac{du}{(1-u)^2} = -\frac{1}{1-u} + C =$$

$$= -\frac{1}{1-cosx} + C.$$

Приклад 5.25. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{4-3cos^2x+5sin^2x}.$$

Розв'язання: Скористаємося підстановкою (5.20) і формулами (5.21):

$$\int \frac{dx}{4-3cos^2x+5sin^2x} = \begin{bmatrix} u = tgx \\ sin^2x = \frac{u^2}{1+u^2} \\ cos^2x = \frac{1}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{4-\frac{3}{1+u^2}+\frac{5u^2}{1+u^2}} =$$

$$= \int \frac{du}{4+4u^2-3+5u^2} = \int \frac{du}{9u^2+1} = \frac{1}{3} arctg3u + C =$$

$$= \frac{1}{3} arctg(3tgx) + C.$$

5.7.2. Інтегралі типу $\int sin^m x \, cos^n x dx$

Нехай m і n - цілі числа. Можливі наступні випадки:

а) m або n - непарне число. Нехай для визначеності $m = 2p + 1$. Звідси

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2p+1} x \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int sin^{2p} x \cdot cos^n x \cdot sinx dx.$$

Зробимо заміну

$$\begin{gathered} u = cosx \\ 1 - u^2 = sin^2 x \\ du = -sinxdx \end{gathered} \tag{5.22}$$

маємо

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = -\int (1 - u^2)^p \cdot u^n du.$$

Аналогічно, якщо $n = 2p + 1$. Заміна

$$\begin{gathered} u = sinx \\ 1 - u^2 = cos^2 x \\ du = cosxdx \end{gathered} \tag{5.23}$$

зводить інтеграл до

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int u^m \cdot (1 - u^2)^p du;$$

б) m і n - парні числа. Скористаємося формулами зниження степені тригонометричних функцій:

$$\begin{gathered} sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x); \\ cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x). \end{gathered} \tag{5.24}$$

Ці формули приводять інтеграл до інтегралу того ж типу, але з меншими степенями.

Приклад 5.26. Знайти невизначений інтеграл $\int sin^5 2x dx$.

Розв'язання: В підінтегральному виразі – непарний степінь синуса, тому скористаємося формулами (5.22):

$$\int sin^5 2xdx = \int sin^4 2x \cdot sin2xdx = \begin{bmatrix} u = cos2x \\ 1 - u^2 = sin^2 2x \\ du = -2sin2xdx \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-u^2)^2 du = -\frac{1}{2}\int (1-2u^2+u^4)\, du =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{3}cos^3 2x - \frac{1}{10}cos^5 2x + C.$$

Приклад 5.27. Знайти невизначений інтеграл

$$\int cos^4 3x \cdot sin^2 3xdx.$$

Розв'язання: В підінтегральному виразі і синус, і косинус - в парних степенях, тому скористаємося формулами (5.24):

$$\int cos^4 3x \cdot sin^2 3xdx = \int \left(\frac{1}{2}(1+cos6x)\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1-cos6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+2cos6x+cos^2 6x)\,(1-cos6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+2cos6x+cos^2 6x - cos6x - 2cos^2 6x - cos^3 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+cos6x-cos^2 6x - cos^3 6x)dx = I$$

Розіб'ємо отриманий інтеграл на чотири. Перші два – табличні, в третьому – підінтегральна функція містить парний степінь косинусу, тому скористаємося формулами (5.24); в четвертому – непарний степінь косинусу, тому необхідно скористатися формулами (5.23). Якщо обчислити всі інтеграли одночасно читачеві важко, радимо розглянути кожен з них окремо. Отже маємо

$$I = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int cos6xdx - \frac{1}{16}\int (1+cos12x)dx -$$

$$-\frac{1}{48}\int(1-sin^2 6x)^2 d(sin6x)=\frac{1}{8}x+\frac{1}{48}sin6x-\frac{1}{16}x-$$

$$-\frac{1}{192}sin12x-\frac{1}{48}sin6x+\frac{1}{144}sin^3 6x+C=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{192}sin12x+\frac{1}{144}sin^3 6x+C.$$

5.7.3. Інтеграли типу $\int \boldsymbol{sin\alpha x\ cos\beta x\ dx}$, $\int \boldsymbol{sin\alpha x\ sin\beta x\ dx}$, $\int \boldsymbol{cos\alpha x\ cos\beta x\ dx}$

Ці інтегралі бепосередньо обчислюються, якщо підінтегральні функції переписати за формулами перетворення добутку у суму:

$$\begin{aligned} sin\alpha x\, cos\beta x &= \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)x+sin(\alpha-\beta)x];\\ sin\alpha x\, sin\beta x &= \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x-cos(\alpha+\beta)x];\\ cos\alpha x\, cos\beta x &= \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x+cos(\alpha+\beta)x]. \end{aligned} \qquad (5.25)$$

Приклад 5.28. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin3x\, cos5x\, dx.$$

Розв'язання: Скористаємося першою з формул (5.25):

$$\int sin3x\, cos5x\, dx=\frac{1}{2}\int\big(sin(3x+5x)+sin(3x-5x)\big)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(sin8x-sin2x)dx=-\frac{1}{16}cos8x+\frac{1}{4}cos2x+C.$$

5.8. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

5.8.1. Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, \dots, \sqrt[k]{ax+b}\right)dx$

Щоб позбутися ірраціональностей в підінтегральному виразі, зробимо підстановку

$$ax + b = u^p, \tag{5.26}$$

де p - найменше спільне кратне чисел $m, n, \dots k$. За допомогою цієї підстановки підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від $ax + b$.

Приклад 5.29. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$.

Розв'язання: Підінтегральний вираз містить лише корінь квадратний від $x + 2$, тому підстановка $x + 2 = u^2$ (за формулою (5.26)) позбуває ірраціональності даний інтеграл:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}} = \begin{bmatrix} x + 2 = u^2 \\ x = u^2 - 2 \\ dx = 2udu \end{bmatrix} = \int \frac{\left(u^2-2\right)^3 2udu}{u} =$$

$$= 2\int (u^6 - 6u^4 + 12u^2 - 8)du = \frac{2}{7}u^7 - \frac{12}{5}u^5 + \frac{24}{3}u^3 - 16u + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{(x+2)^5} + 8\sqrt{(x+2)^3} - 16\sqrt{x+2} + C.$$

Приклад 5.30. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{\sqrt[3]{2x+1}+1}$.

*Розв'язання:*Підінтегральний вираз містить квадратний та кубічний корені. Щоб зробити підстановку, знайдемо найменше спільне кратне чисел 2 і 3: НСК$(2,3) = 6$. Отже, за формулою (5.26) маємо

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{\sqrt[3]{2x+1}+1} = \begin{bmatrix} 2x+1=u^6 \\ 2dx = 6u^5du \\ dx = 3u^5du \end{bmatrix} = \int \frac{u^3 \cdot 3u^5 du}{u^2+1} = 3\int \frac{u^8du}{u^2+1} = I$$

Ми отримали неправильний раціональний дріб. Перед інтегруванням потрібно виділити цілу частину. Цю процедуру ми вже розглядали, тому приведемо результат.

$$I = 3\int \left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right)du =$$

$$= \frac{3}{7}u^7 - \frac{3}{5}u^5 + u^3 - 3u + 3arctgu + C =$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x+1)^7} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5} + \sqrt{2x+1} - 3\sqrt[6]{2x+1} +$$

$$+3arctg\sqrt[6]{2x+1} + C.$$

5.8.2. Інтеграли типу

$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$

Позбутися таких квадратичних ірраціональностей ми зможемо за допомогою тригонометричних підстановок, з урахуванням основних тригонометричних формул. Розглянемо кожен з цих інтегралів окремо:

а) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$. Скористаємося підстановкою

$$x = a\,sint. \qquad (5.27,а)$$

звідси

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2sin^2t} = a\,cost; \quad dx = a\,costdt. \qquad (5.27,б)$$

б) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$. Скористаємося підстановкою

$$x = \frac{a}{sint}. \tag{5.28,а}$$

звідси

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{sin^2 t} - a^2} = a\sqrt{\frac{1 - sin^2 t}{sin^2 t}} = a\frac{cost}{sint} = a\,tgt; \\ &dx = -\frac{acost}{sin^2 t}dt. \end{aligned} \tag{5.28,б}$$

в) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$. Скористаємося підстановкою

$$x = a\,tgt. \tag{5.29,а}$$

звідси

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 tg^2 t + a^2} = a\sqrt{\frac{sin^2 t + cos^2 t}{cos^2 t}} = \frac{a}{cost}; \\ &dx = \frac{a\,dt}{cos^2 t}. \end{aligned} \tag{5.29,б}$$

Проілюструємо використання отриманих формул на прикладах.

Приклад 5.31. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx.$$

Розв'язання: За формулами (5.27) маємо

$$\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2sint \\ dx = 2costdt \\ \sqrt{4 - x^2} = 2cost \end{bmatrix} = \int 4sin^2 t\ 2cost\ 2costdt =$$

$$= 16\int sin^2 t\,cos^2 t\,dt = 16 \cdot \frac{1}{4}\int sin^2 2t\,dt = I$$

Ми отримали інтеграл від тригонометричної функції. Скористаємося формулами (5.24):

$$I = 4 \cdot \frac{1}{2}\int(1 - cos4t)dt = 2t - \frac{2}{4}sin4t + C =$$

$$= 2arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}sin\left(4arcsin\frac{[}{2}\right) + C.$$

Приклад 5.32. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx$.

Розв'язання: За формулами (5.29) маємо

$$\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx = \begin{bmatrix} x = 3tgt \\ dx = \frac{3dt}{cos^2t} \\ \sqrt{x^2+9} = \frac{3}{cost} \end{bmatrix} = \int\frac{\frac{3}{cost}\cdot\frac{3dt}{cos^2t}}{81tg^4t} = \frac{1}{9}\int\frac{1}{cos^3t}\cdot\frac{cos^4t}{sin^4t}dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int\frac{cost}{sin^4t}dt = I$$

Ми отримали інтеграл від тригонометричної функції. Скористаємося формулами (5.18):

$$I = \begin{bmatrix} u = sint \\ du = costdt \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\int\frac{du}{u^4} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{27u^3} + C =$$

$$= \frac{1}{27sin^3t} + C.$$

5.9. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

До поняття визначеного інтегралу приводить велика кількість прикладних задач математики, фізики, та інших наук, а саме – обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єму, роботи змінної сили, моментів інерції і т.п. У зв'язку з цим спробуємо розв'язати класичну задачу про площу криволінійної трапеції.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано неперервну функцію $f(x)$ (рис. 5.1) Позначимо, як і раніше через M найбільше та m найменше значення функції $f(x)$ на цьому відрізку. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин точками

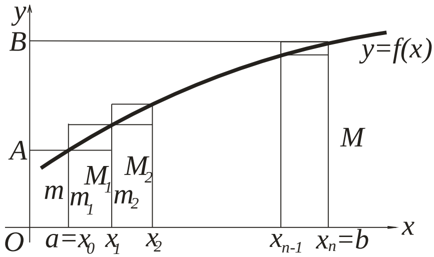


Рис. 5.1.

$a = x_o,\ x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1},\ x_n = b$, такими, що $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Позначимо різниці як $x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2$, $\dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$. Найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на кожній частині позначимо як $m_1, M_1,\ m_2, M_2, \dots, m_n, M_n$.

Обчислимо суми:

$$\underline{S_n} = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i; \quad (5.30)$$

$$\overline{S_n} = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i. \quad (5.31)$$

Першу суму - $\underline{S_n}$ - називають ***нижньою інтегральною сумою***, а другу - $\overline{S_n}$ - ***верхньою інтегральною сумою***.

В нашому випадку $f(x) \geq 0$. Таким чином нижня інтегральна сума чисельно дорівнює площі вписаної ступінчатої фігури ,а верхня інтегральна сума – площі описаної ступінчатої фігури .

В кожному з відрізків $[x_0, x_1], [x_1, x_2]$, $\dots, [x_{n-1}, x_n]$ візьмемо довільну точку, яку позначимо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (рис. 5.2). Обчислимо значення функції в кожній з обраних точок: $f(\xi_1), f(\xi_2)$,

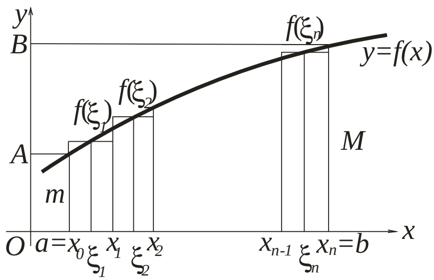


Рис. 5.2.

$\dots, f(\xi_n)$. Складемо суму

$$S_n = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \quad (5.30)$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Оскільки при довільному ξ_i з інтервалу $[x_{i-1},x_i]$ справедливо $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ і всі $\Delta x_i > 0$, то

$$m_i\cdot\Delta x_i \le f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \le M_i\cdot\Delta x_i.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x_i,$$

або

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}. \quad (5.31)$$

Геометричний зміст (5.31) наступний: площа фігури S, що обмежена ламаною, приймає значення, яке міститься між значеннями площі уписаної та описаної ламаних.

Знайдена сума S_n залежить від способу ділення відрізку $[a,b]$ на частини $[x_{i-1},x_i]$ і від того, як обрані точки ξ_i в цих відрізках.

Позначимо як $max\Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків Δx_i. Зрозуміло, що площа фігури, яка обмежена ламаною тим більше буде наближатися до площі фігури, яка обмежена кривою $f(x)$, якщо $max\Delta x_i \to 0$. При цьому кількість ділень n буде наближатися до нескінченності ($n \to \infty$).

Розглянемо деяку послідовність ділення відрізка $[a,b]$, при якій $max\Delta x_i \to 0$, а $n \to \infty$. Візьмемо в кожному частковому інтервалі відповідні ξ_i. Припустимо,що ця впорядкована послідовність інтегральних сум прямує до деякої границі

$$\lim_{max\Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S. \qquad (5.32)$$

Визначення 5.4. ***Визначеним інтегралом*** називається границя до якої прямує n-та інтегральна сума (5.32) при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового інтегралу. Позначається визначений інтеграл як

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{n \to \infty} S_n = S. \qquad (5.33)$$

Тут функція $f(x)$ називається ***підінтегральною функцію***; вираз $f(x)dx$ - ***підінтегральним виразом***, а a і b - ***границями інтегрування***.

Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде чисельно дорівнювати площі S криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a,\ x = b$ і віссю Ox.

Теорема 5.7 ***(про існування визначеного інтегралу).*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому інтервалі $[a, b]$, то іі n -та інтегральна сума прямує до границі при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового інтервалу. Ця границя, тобто визначний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, не залежить від способу ділення інтервалу інтегрування на часткові інтервали та від вибору в них проміжних точок.

Інтегральні суми, які складені при різних діленнях інтервалу інтегрування та різному виборі проміжних точок ξ, можуть суттєво відрізнятися одна від одної. Але для неперервних функцій різниця між цими сумами зникає при прямуванні до нуля найбільшого часткового інтервалу та до нескінченності кількості точок ділень відрізку інтегрування.

5.10. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

Насамперед зауважимо, що визначений інтеграл від функції є число, яке відповідає даній функції згідно визначенню (5.33), тому це число не залежить від вибору позначення аргументу підінтегральної функції, тобто від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du. \qquad (5.34)$$

Для нас принциповою є і наступна формула

$$\int_a^b dx = b - a. \qquad (5.35)$$

з якої прямує, що будь-яка інтегральна сума для функції $f(x) \equiv 1$ дорівнює $b - a$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a$$

<u>Теорема 5.8</u> (про інтеграл суми). Визначений інтеграл від суми декількох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(u(x) + v(x) + \cdots + w(x)\big)dx =$$

$$= \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx. \qquad (5.36)$$

Доведення: За визначенням $\int_a^b f(x)dx$, частину тотожності (5.36), яка стоїть ліворуч можна записати так

$$I = \lim \ \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i + \cdots + w_i)\Delta x_i =$$

$$\lim \ \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i\right).$$

За теоремою про границю суми маємо

$$I = \lim \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i + \lim \quad \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i + \cdots + \lim \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i.$$

Звідси, після граничного переходу (5.32) маємо частину тотожності (5.36), яка стоїть праворуч:

$$I = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx,$$

що і треба було довести.

***<u>Теорема 5.9</u>* (про винесення постійного множника).** Постійний множник можна виносити за знак інтегралу

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \tag{5.37}$$

де C -константа.

Доведення: За визначенням інтегралу маємо

$$I = \lim \quad \sum_{i=1}^{n} Cu_i \Delta x_i.$$

Винесемо константу C за знак суми, а потім за знак границі (за властивістю границь), остаточно маємо

$$I = \lim \quad C\sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i = C\lim \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i = C\int_a^b f(x)dx,$$

що і треба було довести.

***<u>Теорема 5.10</u>* (про перестановку границь).** Якщо верхню та нижню границі визначеного інтегралу переставити місцями, то знак інтегралу зміниться на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{5.38}$$

Доведення: Нехай $a > b$. Якщо інтервал інтегрування $[a, b]$ розбити на частини точками $x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1}$ то отримаємо:

$$a > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > b.$$

Різниці $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ будуть від'ємними. З цього прямує, що усі доданки у (5.30) будуть від'ємними, і після граничного переходу отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

що і треба було довести.

<u>Теорема 5.11</u> (про адитивність інтегралу). Нехай $a < c < b$. Якщо існує визначений інтеграл на відрізках $[a, c]$, $[c, b]$, то існує інтеграл і на відрізку $[a, b]$, при цьому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (5.39)$$

Доведення: Відомо, що границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття інтервалу $[a, b]$ на частини. Розіб'ємо інтервал $[a, b]$ таким чином, щоб точка c завжди була точкою його ділення (рис 5.3). За властивістю часткових інтегральних сум маємо

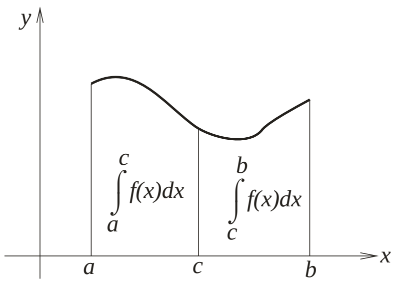


Рис. 5.3.

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\nolimits_1 f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\nolimits_2 f(\xi_i)\Delta x_i$$

де в частині тотожності, яка стоїть праворуч, першому доданку відповідають елементи, які включають точки ділення інтервалу $[a, c]$, а в другому доданку – інтервалу $[c, b]$.

За визначенням (5.33) перша часткова сума буде прямувати до інтегралу в границях від a до c, а друга – до інтегралу в границях від c до b:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

що і треба було довести.

<u>Теорема 5.12</u>* *(про знак визначеного інтегралу). Якщо підінтегральна функція в інтервалі інтегрування не змінює знак, то визначений інтеграл є числом того ж знаку, що й підінтегральна функція.

Доведення: Нехай для визначеності $f(x) \geq 0$ в інтервалі $[a, b]$ $(a < b)$. В інтегральній сумі $I = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ всі доданки невід'ємні, тобто $I \geq 0$, а границя невід'ємної величини не може бути від'ємною. Звідси маємо

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

<u>Теорема 5.12</u>* *(про оцінку визначеного інтегралу). Значення визначного інтегралу лежить в межах між добутками найменшого та найбільшого значень підінтегральної функції на довжину інтервалу інтегрування:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a), \qquad (5.40)$$

де m і M - найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$.

Доведення: Розглянемо дві функції $M - f(x)$ і $m - f(x)$. Перша з них на інтервалі $[a, b]$ невід'ємна, а друга недодатна. За теоремою 5.11 маємо

$$\int_a^b [M - f(x)]dx \geq 0 \quad \text{і} \quad \int_a^b [m - f(x)]dx \leq 0$$

за формулою (5.35) маємо

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \quad \text{і} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx,$$

що і треба було довести.

Геометричний зміст доведеного наступний: площа криволінійної трапеції більше площі прямокутника з основою, яка дорівнює основі трапеції, і висотою, яка дорівнює найменшій ординаті трапеції, і менше площі прямокутника з тією же основою і висотою, яка дорівнює найбільшій ординаті трапеції (рис. 5.4).

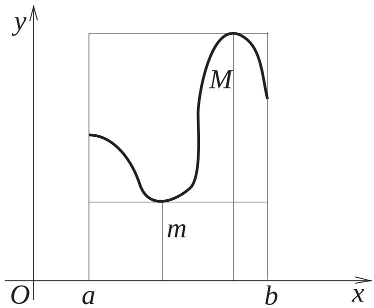


Рис. 5.4.

<u>Теорема 5.13</u> (про середнє значення). Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a,b]$, то на цьому інтервалі існує хоча б одна точка ξ, для якої буде виконуватися наступне

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi). \tag{5.41}$$

Доведення: За теоремою 5.12 маємо

$$m < \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < M,$$

а звідси

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu,$$

де μ - деяке число, яке розташоване між найменшим та найбільшим значеннями функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$: $m < \mu < M$. За умовою теореми функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a,b]$, тому обов'язково хоча б один раз прийме кожне значення, яке розташоване між m і M. З цього прямує, що при деякому $\xi \in [a,b]$ функція $f(x)$ набуде значення $f(\xi) = \mu$: , що і треба було довести.

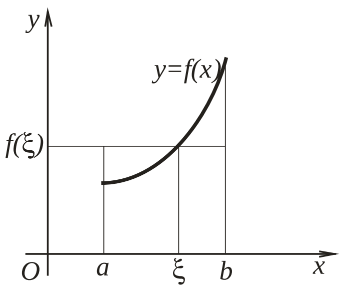


Рис. 5.5.

Геометричний зміст доведеного наступний: площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $f(x)$ дорівнює площі прямокутника з основою довжини $b-a$ і висотою довжини $f(\xi)$ (рис. 5.5).

Тотожність (5.41) можна переписати і як

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Звідси теорему про середнє значення можна сформулювати наступним чином:

Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює добутку значення цієї функції в деякій проміжній точці інтервалу інтегрування на довжину інтервалу.

5.11. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦЯ

Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, в якому нижня границя стала, а верхня границя змінна. Зрозуміло, що зі зміною верхньої границі буде змінюватися і значення інтегралу, тобто інтеграл є функцією верхньої границі:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{5.42}$$

Якщо $f(t) \geq 0$, то $\Phi(x)$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $aAXx$ (рис. 5.6). Значення площі буде змінюватися в залежності від зміни x.

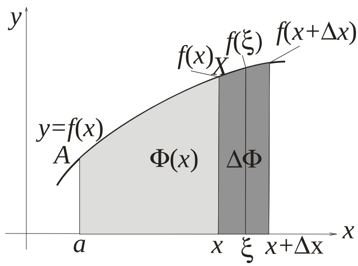


Рис. 5.6.

Знайдемо похідну визначного інтегралу (5.42) по верхній границі. Для цього розглянемо теорему.

<u>Теорема 5.14.</u> Якщо $f(x)$ неперервна функція і $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то справедливо наступне

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доведення: Нехай аргумент x набуває приріст Δx, звідси (за формулою (5.39)) маємо

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Обчислимо приріст функції:

$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) =$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Для отриманого інтегралу застосуємо теорему про середнє значення інтегралу (теорему 5.13):

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi) \cdot \Delta x,$$

де $x < \xi < \ x + \Delta x$.

Знайдемо відношення приросту функція до приросту аргументу: $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$.

За визначенням похідної маємо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

Зрозуміло, що при $\Delta x \to 0$, $\xi \to x$, тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ f(x).$$

За умовою теореми функція $f(x)$ неперервна, отже остаточно маємо $\Phi'(x) = f(x)$, що і треба було довести.

<u>Теорема 5.15.</u> Значення визначеного інтегралу дорівнює різниці значень будь-якої первісної від підінтегральної функції, обчисленої при $x = a$ і $x = b$, тобто границях інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (5.43)$$

Формула (5.43) називається ***формулою Ньютона-Лейбниця***.

Доведення: Нехай $F(x)$ - деяка первісна від функції $f(x)$. За теоремою 5.14 функція $\int_a^x f(t)dt$ також є первісною від функції $f(x)$. Але дві первісні від однієї функції відрізняються на сталу величину C_1 (теорема 5.1). Тому можемо записати

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C_1 \qquad (5.44)$$

Спробуємо визначити значення C_1, для цього скористуємося властивістю визначного інтегралу, а саме

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Звідси $F(a) + C_1 = 0$, тобто $C_1 = -F(a)$.

Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Підставимо $x = b$ і повернемося до змінної x, остаточно маємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

що і треба було довести.

Різницю функцій часто записують як

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

З урахуванняv останнього позначення, перепишемо формулу Ньютона-Лейбниця у вигляді, яким і будемо користатися:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (5.45)$$

Формула Ньютона-Лейбниця дає нам основний спосіб обчислення визначених інтегралів не виконуючи додавання, а лише за допомогою первісною, тобто за допомогою невизначеного інтегрування.

Приклад 5.33. Обчислити інтеграл $\int_1^3 \frac{5x^4-3x^2-7x+13}{2x^2}dx$.

Розв'язання: Скористаємося формулою Ньютона-Лейбниця і основними властивостями визначеного інтегралу

$$\int_1^3 \frac{5x^4-3x^2-7x+13}{2x^2}dx = \frac{5}{2}\int_1^3 x^2dx - \frac{3}{2}\int_1^3 dx - \frac{7}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x} + \frac{13}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - \frac{3x}{2}\Big|_1^3 - \frac{7}{2}ln\lceil x\rceil\Big|_1^3 - \frac{13}{2x}\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{45}{2} - \frac{5}{6} - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2}ln3 + \frac{7}{2}ln1 - \frac{13}{6} + \frac{13}{2} = 23 - \frac{7}{2}ln3.$$

Приклад 5.34. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$.

Розв'язання: Для обчислення визначеного інтегралу, згадаємо правило знаходження первісної від раціонального дробу

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \\ \begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B, \quad B = -A = -1 \\ x^1 & 0 = C \\ x^0 & 1 = A \end{array} \end{array}\right] = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= ln|x|\,\Big|_1^2 - \frac{1}{2}ln|x^2+1|\,\Big|_1^2 = ln2 - ln1 - \frac{1}{2}ln5 + \frac{1}{2}ln2 =$$

$$= \frac{3}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln5 = \frac{1}{2}(ln2^3 - ln5) = \frac{1}{2}ln\frac{8}{5}.$$

Приклад 5.35. Обчислити інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+2x}$.

Розв'язання: $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+2x} = \int_2^3 \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1} = \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)^2-1} =$

$$= \frac{1}{2}ln\left|\frac{x+1-1}{x+1+1}\right|\,\Big|_2^3 = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\,\Big|_2^3 = \frac{1}{2}ln\frac{3}{5} - \frac{1}{2}ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}ln\frac{6}{5}.$$

5.12. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Як і при знаходженні первісної при невизначеному інтегруванні, одним з найпоширеніших методів є метод заміни змінної. Але заміна змінної в визначеному інтегралі потребує більшої уваги.

Нагадаємо, що за формулою (5.7) у невизначеному інтегралі має місце тотожність

$$\int f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)du = \int f(x)dx|_{x=\varphi(u)}.$$

Сформулюємо правило заміни зміни у визначеному інтегралі за допомогою наступної теореми.

<u>Теорема 5.16.</u> Якщо в інтервалі $[\alpha,\beta]$ функції $x=\varphi(u)$, $\varphi'(u)du$ і $f\big(\varphi(u)\big)$ неперервні і $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)du. \qquad (5.46)$$

Доведення: Будемо вважати, що невизначений інтеграл ліворуч відомий і дорівнює $F(x)$, звідси

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Згідно заміні змінної у невизначеному інтегралі, інтеграл праворуч дорівнює $F\big(\varphi(u)\big)$, а тому

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)dt = F\big(\varphi(\alpha)\big) - F\big(\varphi(\beta)\big) = F(b) - F(a).$$

Порівняємо отримані результати, маємо формулу (5.46).

Зауваження 1. Перетворення підінтегрального виразу при заміні змінної у визначеному інтегралі відбувається саме так, як і у невизначеному. Нові ж границі інтегрування α і β є коренями рівнянь:

$$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$$

Зауваження 2. При замінні змінної у визначеному інтегралі повертатися до попередньої змінної не потрібно. Первісні обчислюються при нових границях інтегрування.

Приклад 5.36. Обчислити інтеграл $\int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx$.

Розв'язання: $\int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx = \begin{bmatrix} u = e^x - 1 \\ du = e^x dx \\ u_{\text{н}} = e^0 - 1 = 0 \\ u_{\text{в}} = e^1 - 1 \end{bmatrix} =$

$$= \int_0^{e-1} u^5 du = \frac{u^6}{6}\Big|_{0}^{e-1} = \frac{1}{6}(e-1)^6.$$

Приклад 5.37. Обчислити інтеграл $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

Розв'язання:

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} = \begin{bmatrix} x + 2 = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \\ \text{н:}\quad -2 + 2 = t^3;\ \ t^3 = 0;\ \ t_{\text{н}} = 0 \\ \text{в:}\ \ 0 + 2 = t^3;\ \ t^3 = 2;\ \ t_{\text{в}} = \sqrt[3]{2} \end{bmatrix} = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3t^2 dt}{1+t} =$$

$$= 3\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2} - t + ln|1+t|\right)\Big|_0^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} + 3ln\left|1 + \sqrt[3]{2}\right|.$$

Приклад 5.38. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$.

Розв'язання: При обчисленні цього визначеного інтегралу скористаємося формулами (5.38), (5.43), (5.46):

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x} \\ du = -\frac{dx}{x^2} \\ u_{\text{н}} = \pi \\ u_{\text{в}} = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} sinudu = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sinudu =$$

$$= -cosu\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1 - 0 = 1.$$

Приклад 5.39. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3cosx+2}$.

Розв'язання: При обчисленні цього визначеного інтегралу, скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою (5.17):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3cosx+2} = \begin{bmatrix} u = tg\frac{x}{2} \\ cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \\ u_{\text{н}} = tg0 = 0 \\ u_{\text{в}} = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{du}{1+u^2}}{3\frac{1-u^2}{1+u^2}+2} = -\int_0^1\frac{du}{u^2-5} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{u-\sqrt{5}}{u+\sqrt{5}}\right|\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|.$$

Приклад 5.40. Обчислити інтеграл $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx$.

Розв'язання: При обчисленні цього визначеного інтегралу, для позбавлення від ірраціональності, скористаємося підстановкою (5.27) та формулами зниження степені тригонометричних функцій (5.24):

$$\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 5sint \\ dx = 5costdt \\ \sqrt{25-x^2} = 5cost \\ \text{н: } \ 0 = 5sint; \ \ sint = 0; \ \ t_{\text{н}} = 0 \\ \text{в: } \ 5 = 5sint; \ \ sint = 1; \ \ t_{\text{в}} = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\, sin^2 t \cdot 5cost \cdot 5costdt = \frac{625}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2tdt =$$

$$= \frac{625}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos4t)dt = \frac{625}{8}\left(t-\frac{1}{4}sin4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{625}{16}\pi.$$

5.13. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Теорема 5.17. Нехай u і v - диференційовані функції незалежної змінної x на відрізку $[a, b]$, тоді

$$\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du. \qquad (5.47)$$

Формула (5.47) має назву ***формули інтегрування частинами визначених інтегралів.***

Доведення: Нехай u і v - диференційовані функції незалежної змінної x. Тоді справедливо наступне

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Проінтегруємо обидві частини тотожності в границях від a до b, маємо

$$\int_a^b (u \cdot v)' dx = \int_a^b u' \cdot v \, dx + \int_a^b u \cdot v' \, dx \qquad (5.48)$$

За визначенням первісної $\int (u \cdot v)' dx = u \cdot v + C$, тому

$\int_a^b (u \cdot v)' dx = u \cdot v \Big|_a^b$. Тотожність (5.48) можна переписати у вигляді

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v \cdot du + \int_a^b u \cdot dv$$

або

$$\int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du,$$

що і треба було довести.

Зауваження: У формулі (5.47) букви u і v означають представлення підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді $u(x) \cdot dv(x)$. Не треба плутати це представлення з заміною змінної, тому нових змінних і границь інтегрування при інтегруванні частинами не виникає.

Приклад 5.41. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2x}$.

Розв'язання: За формулою (5.47) маємо

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2x} = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{dx}{sin^2x} & v = -ctgx \end{bmatrix} = -x \cdot ctgx \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgx dx = -x \cdot ctgx \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + ln|sinx| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= -\frac{\pi}{3} ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} ctg\frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{3}}{2} - ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 5.42. Обчислити інтеграл $\int_1^e ln^3x\, dx$.

Розв'язання: Скористаємося формулою (5.47). Зауважимо, що інтегрувати частинами необхідно буде тричі:

$$\int_1^e ln^3x\, dx = \begin{bmatrix} u = ln^3x & du = 3ln^2x\frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x \cdot ln^3x \Big|_1^e -$$

$$-3\int_1^e x \cdot ln^2x \cdot \frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} u = ln^2x & du = 2lnx\frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= e \cdot ln^3e - 1 \cdot ln^3 1 - 3\left(x \cdot ln^2x \Big|_1^e - 2\int_1^e x \cdot lnx \cdot \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = lnx & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = e - 3e \cdot ln^2e + 3 \cdot ln^2 1 +$$

$$+6\left(x \cdot lnx \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x}\right) = e - 3e + 6e \cdot lne - 6 \cdot ln1 -$$

$$-6x \Big|_1^e = -2e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e.$$

5.14. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

5.14.1. Невласні інтеграли з нескінченими границями

Визначення 5.5. Нехай функція $f(x)$ визначена на півнескінченому інтервалі $[a, \infty)$ та інтегровна на будь-якому відрізку $[a, \eta]$. Якщо існує границя $\lim_{\eta\to\infty} \int_a^\eta f(x)dx$ то функція $f(x)$ називається і***нтегровну невласно*** на проміжку $[a, \infty)$, а вказана границя називається ***невласним інтегралом*** і позначається $\int_a^\infty f(x)dx$, тобто

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty} \int_a^\eta f(x)dx. \qquad (5.49)$$

Якщо вказана границя існує (і приймає скінчене значення), то невласний інтеграл називається ***збіжним***, а якщо не існує (або прямує до нескінченності), то ***розбіжним***.

Якщо відома первісна функція $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, то розв'язати питання про збіжність невласного інтеграла можна за формулою Ньютона-Лейбниця

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty} F(\eta) - F(a). \qquad (5.50)$$

Аналогічно визначаються невласні інтеграли

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\eta\to-\infty} \int_\eta^b f(x)dx = F(b) - \lim_{\eta\to-\infty} F(\eta); \quad 5.51)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \quad (-\infty < c < \infty). \quad (5.52)$$

З (5.52) зрозуміло, що якщо кожен з невласних інтегралів праворуч збігається, то збігається й невласний інтеграл праворуч.

Приклад 5.43. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання: За формулою (5.50) маємо

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\eta\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^\eta = 2\lim_{\eta\to\infty}\sqrt{\eta} - 2\sqrt{1} = \infty - 2 = \infty,$$

отже, даний невласний інтеграл розбігається.

Приклад 5.44. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} dx$.

Розв'язання: Зробимо заміну змінної та скористаємося формулою (5.51):

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \begin{bmatrix} u = -x^2 \\ du = -xdx \\ u_{\text{н}} = 0 \\ u_{\text{в}} = -\infty \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^u du =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\eta \to -\infty} e^u \Big|_{\eta}^{0} = \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} \lim_{\eta \to -\infty} e^{\eta} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

Тобто даний невласний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

5.14.2. Невласні інтеграли від розривних функцій

Визначення 5.6. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a, b)$, а в точці $x = b$ функція або не визначена, або має розрив другого роду. В цьому випадку не можна говорити про визначний інтеграл (за визначенням він є границею інтегральних сум), бо функція $f(x)$ не є неперервною на інтервалі $[a, b]$, тому границя може не існувати. Позначимо інтеграл від функції, яка має розрив в точці b, так

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (5.53)$$

Якщо існує ця границя (5.53), то функція $f(x)$ називається і***нтегровною невласно*** на проміжку $[a, b)$, а вказана границя називається ***невласним інтегралом*** .

Аналогічно визначається невласний інтеграл, якщо функція $f(x)$ має розрив на нижній границі :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \quad (5.54)$$

В тому випадку, якщо функція $f(x)$ має розрив в деякій точці $x = c$, яка належить інтервалу інтегрування $[a, b]$, то інтеграл розбивають на два, в одному з них функція має розрив на верхній границі (5.53), а в другому – на нижній (5.54):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (5.55)$$

Приклад 5.45. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{16-x}}$.

Розв'язання: Функція має розрив на верхній границі, в точці $x = 16$, при знаходженні первісної, виконаємо заміну змінної. Перепишемо інтеграл за властивістю (5.38), точка розриву опинилася на нижній границі, тому скористаємося формулою (5.54):

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{16-x}} = \begin{bmatrix} u = 16 - x \\ du = -dx \\ u_\text{н} = 16 - 0 = 16 \\ u_\text{в} = 16 - 16 = 0 \end{bmatrix} = -\int_{16}^{0} \frac{du}{\sqrt[4]{u}} = \int_0^{16} u^{-\frac{1}{4}} du =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \Bigg|_{0+\varepsilon}^{16} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{16^3} - \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt[4]{(0+\varepsilon)^3} = \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3},$$

отже невласний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{32}{3}$.

Приклад 5.46. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Розв'язання: Функція має точку розриву в середині інтервалу інтегрування, а саме в точці $x = 1$. Розіб'ємо інтеграл на два (5.55). Дослідимо кожен з отриманих інтегралів на збіжність за формулами (5.53), (5.54):

$$\int_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^{2} \frac{dx}{(x-2)^2-1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{2} ln \left| \frac{x-2-1}{x-2+1} \right| \Bigg|_{0}^{1-\varepsilon} + \frac{1}{2} ln \left| \frac{x-2-1}{x-2+1} \right| \Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} \right] =$$

$= \frac{1}{2}(-\infty - ln3 + ln1 - \infty) = -\infty$, отже, невласний інтеграл розбігається.

5.15. ДЕЯКІ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

5.15.1. Обчислення площі плоскої фігури

За геометричним тлумаченням визначного інтегралу (5.31), площа криволінійної трапеції (рис. 5.7,а), яка обмежена кривою $y = f(x)$, лініями $x = a$ і $x = b$, і віссю Ox, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.56}$$

Якщо плоска фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ (рис. 5.7,б), то для обчислення площі, необхідно знайти точки перетину кривих $x = a$ і $x = b$. Ці точки є границями інтегрування.

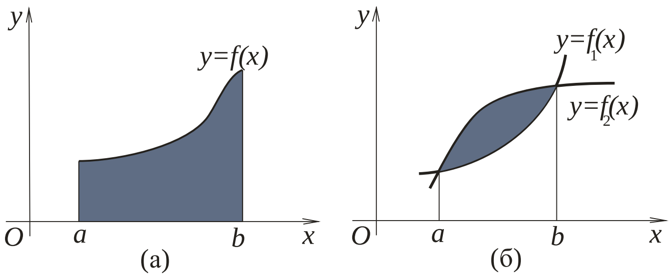


Рис. 5.7.

Шукана площа плоскої фігури може бути знайдена як різниця між площами криволінійних трапецій, обмежених лініями $y = f_1(x), y = 0, x = a, x = b$ і $y = f_2(x), y = 0, x = a, x = b$, тобто

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \tag{5.57}$$

Приклад 5.47. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x + 2$.

Розв'язання: Побудуємо фігуру (рис. 5.8). Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

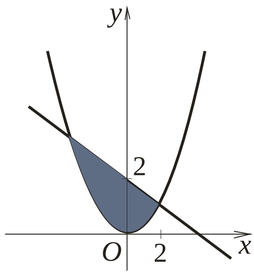


Рис. 5.8.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}; \qquad \begin{aligned} &x^2 = x + 2; \\ &x^2 - x - 2 = 0; \\ &x_1 = -1; \quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

Отже, точки перетину $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$.

Обчислимо площу за формулою (5.57):

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2} \ (\text{од}^2).$$

5.15.2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай в декартовій системі координат задано неперервну криву $y = f(x)$ (рис. 5.9). Знайдемо довжину дуги $\overset{\frown}{AB}$ цієї кривої, яка розташована в інтервалі між $x = a$ і $x = b$.

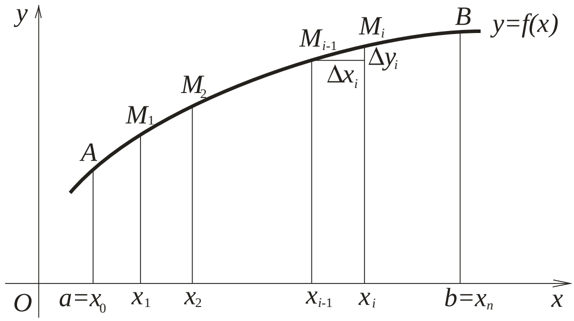


Рис. 5.9.

Поділимо дугу $\breve{AB}$ точками $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ з абсцисами $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$. Поєднаємо точки відрізками $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$, довжини яких позначимо відповідно $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$. Ми отримали ламану $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$, яка вписана в дугу $\breve{AB}$. Довжина ламаної складається з довжин відрізків Δl_i:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Довжиною l дуги $\breve{AB}$ називають границю, до якої прямує довжина ламаної, при прямуванні її найбільшого відрізка до нуля, а числа відрізків $n \to \infty$:

$$l = \lim_{max\Delta l_i \to 0, n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i. \qquad (5.58)$$

Визначимо спосіб обчислення довжини дуги.

Позначимо різниці ординат двох сусідніх точок ділення як $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. За теоремою Піфагора

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i.$$

За теоремою Лагранжа маємо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

де $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

Звідси довжина часткового відрізку ламаної дорівнює

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i$$

Знайдемо границю інтегральної суми, яка дорівнює визначеному інтегралу

$$l = \lim_{\substack{max\Delta l_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

Остаточно формула для обчислення довжини дуги має вигляд:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx. \qquad (5.59)$$

Приклад 5.48. Знайти довжину лінії $y = ln(1 - x^2)$, яка розташована між $x = 0$ і $x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання: Для обчислення довжини дуги, скористаємося формулою (5.59). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме

$y' = -\frac{2x}{1-x^2}$;

$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{\left(1+x^2\right)^2}{(1-x^2)^2}$;

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2-\left(1-x^2\right)}{1-x^2} dx =$

$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} dx = -ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Big|_0^{1/2} - x\Big|_0^{1/2} = -ln\frac{1}{3} - \frac{1}{2} =$

$= ln3 - \frac{1}{2}$ (од.)

5.15.3. Обчислення об’єму тіла

Нехай дано тіло, яке обмежено замкненою поверхнею, і нехай відома площа будь-якого його перетину площиною, паралельною осі Ox (рис. 5.10).

Будемо вважати, що площа такого перетину є відомою нам функцією $S(x)$.

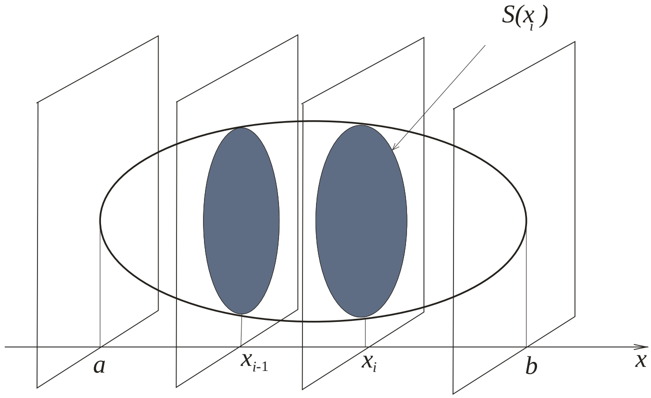


Рис. 5.10.

Нехай все тіло обмежене двома площинами, перпендикулярними до осі Ox і відомо, що ці площини перетинають вісь Ox в точках $x = a,\ x = b$. Для визначення об’єму разіб’ємо тіло на шари за допомогою площин, які перпендикулярні осі Ox і перетинають вісь в точках $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ Замінимо кожен шар прямим циліндром тієї ж висоти і з основою, яка дорівнює $S(x_i)$. Об’єм прямокутного циліндру дорівнює добутку площі основи на висоту. Отже об’єм n-ступінчатого тіла знаходиться як сума

$$V = \sum_{i=o}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i. \tag{5.60}$$

Об’ємом тіла називається границя інтегральної суми при прямуванні найбільшого відрізку до нуля, а числа $n \to \infty$:

$$V=\lim_{\substack{max\Delta x_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=o}^{n}S(x_i)\,\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx. \qquad (5.61)$$

Якщо тіло, об'єм якого ми шукаємо, отримане обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена лінією $y=f(x)$ навколо осі Ox, то перпендикулярним перетином з абсцисою x є коло, радіус якого дорівнює відповідній ординаті лінії $y=f(x)$. В такому разі

$$S(x)=\pi\cdot y^2.$$

Звідси отримаємо формулу для обчислення об'єму тіла обертання:

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (5.62)$$

Приклад 5.49. Знайти об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y=x^3,\ y=4x$ навколо осі Ox, де $x\geq 0$.

Розв'язання: Знайдемо точки перетину ліній, які обмежують цю фігуру:

$$\begin{cases}y=x^3\\ y=4x\end{cases}; \qquad \begin{aligned}&x^3=4x; \quad x^3-4x=0\\ &x(x^2-4)=0;\\ &x_1=0; \quad x_2=2; \quad x_3=-2.\end{aligned}$$

За формулою (5.62) маємо

$$V=\pi\int_0^2[y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,dx=\pi\int_0^2(16x^2-x^6)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{16x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2=\pi\left(\frac{128}{3}-\frac{128}{7}\right)=\frac{512}{21}\pi\ (\text{од}^3).$$

5.16. Застосування визначних інтегралів для розв'язанні задач економіки

Познайомимося з основними поняттями, необхідними нам для розв'язання задач економіки.

Нехай функція $z = f(x)$ описує ***продуктивність*** деякого виробництва за певний час. ***Об'єм продукції*** $Q(t_1, t_2)$, яка вироблена за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \tag{5.63}$$

На продуктивність виробництва продукції може впливати багато різних факторів. Можливість урахування цих факторів, пов'язана з використанням функцій ***Кобба-Дугласа***. В такому випадку функція $f(t)$ є добутком трьох множників

$$f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t), \tag{5.64}$$

де $A(t),\ L(t),\ K(t)$ - величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу (відповідно), $a_0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ - деякі коефіцієнти.

Нехай дано функцію $y = f(x)$, яка характеризує нерівномірність розподілу доходів серед населення, де y - частинка сукупного доходу, яку отримує частинка x найбіднішого населення. Графік цієї функції називається ***кривою Лоренца*** (рис. 5.11). Очевидно, що $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0; 1]$, а з цього прямує,що нерівномірність розподілу доходів тим більша, чим більша площа фігури OAB. Тому для кількісного аналізу нерівномірності розподілу доходів використовують ***коефіцієнт Джині*** k, який дорівнює відношенню площі фігури OAB і площі трикутника OAC:

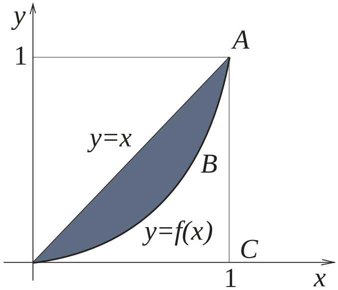


Рис. 5.11.

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}. \qquad (5.65)$$

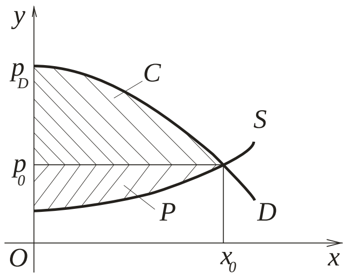


Рис. 5.12

Нехай крива $p = f(x)$ - крива попиту D на деякий товар і $p = g(x)$ - крива пропозиції S, де p ціна на товар, а x - величина попиту (пропозиції). Точка перетину цих ліній (x_0, p_0) має назву ***точка ринкової рівноваги*** (рис. 5.12). Прибуток від реалізації товару x_0 за рівноважною ціною p_0 дорівнює добутку $x_0 p_0$. Якщо ціна буде неперервно знижуватися від максимальної $p_D = f(0)$ до рівноважної p_0 (якщо задовольняється попит), то прибуток складає величину $\int_0^{x_0} f(x)dx$.

Величина коштів

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 p_0, \qquad (5.66)$$

яка зберігається користувачем, якщо товар продається за рівноважною ціною p_0, називається ***виграшем користувачів***.

Аналогічно, величина

$$P = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx, \qquad (5.67)$$

називається ***виграшем постачальників***.

Приклад 5.50. Нехай зміна щоденної продуктивності праці деякого виробництва задана функцією $f(t) = -0{,}0054t^2 + 0{,}028t + 12{,}34$, де t - час у годинах. Знайти об'єм випуску продукції, яка вироблена за 8-годинний робочий день.

Розв'язання: За формулою (5.63) знайдемо об'єм $Q(t_1, t_2)$ продукції, виробленої за проміжок часу $[t_1, t_2]$:

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (-0{,}0054t^2 + 0{,}028t + 12{,}34)dt =$$

$$= (-0{,}0018t^3 + 0{,}014t^2 + 12{,}34t)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Обчислимо об’єм продукції, вироблений за 8-годинний робочий день:

$$Q(0{,}8) = -0{,}0018 \cdot 8^3 + 0{,}014 \cdot 8^2 + 12{,}34 \cdot 8 =$$

$$= -0{,}9216 + 0{,}896 + 98{,}72 = 98{,}6944 \text{ (од.)}.$$

Приклад 5.51. Знайти об’єм виробленої деяким підприємством продукції за 10 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (t+2)^3$, $K(t) = (2t-5)^2$, $a_0 = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Розв’язання: За формулами (5.64), (5.63) маємо

$$Q(0; 10) = 3\int_0^{10} e^t (t+2)(2t-5)dt =$$

$$= 3\int_0^{10} e^t (2t^2 - t - 10)dt = \begin{bmatrix} u = 2t^2 - t - 10 \\ dv = e^t dt \\ du = (4t-1)dt \\ v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= 3e^t(2t^2 - t - 10)\Big|_0^{10} - 3\int_0^{10} e^t (4t-1)dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 4t - 1 \\ dv = e^t dt \\ du = 4dt \\ v = e^t \end{bmatrix} = 3e^{10}(200 - 10 - 10) - 3(-10) -$$

$$-3e^t(4t-1)\Big|_0^{10} + 3 \cdot 4\int_0^{10} e^t dt = 540e^{10} + 30 -$$

$$-117e^{10} - 3 + 12e^{10} - 12 = 435e^{10} + 15 \approx$$

$\approx 9581527{,}621.$

Приклад 5.52. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренці може бути описана рівнянням $y = \frac{2x}{7-3x}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

Розв'язання:

Обчислимо площі фігур, які входять до формули (5.65). Отже площа трикутника дорівнює

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 0{,}5\ (\text{од}^2).$$

а площу фігури OAB знайдемо за формулою (5.57):

$$S_{OAB} = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2x}{7-3x}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{2}{3}\frac{(7-3x)-7}{7-3x}\right)dx = \int_0^1 \left(x + \frac{2}{3} - \frac{14}{3}\frac{1}{7-3x}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x + \frac{14}{9}ln|7-3x|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{14}{9}ln4 - \frac{14}{9}ln7 =$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{14}{9}ln\frac{4}{7} \approx 0{,}2962\ (\text{од}^2).$$

Отже, коефіцієнт Джині дорівнює

$$k = \frac{0{,}2962}{0{,}5} = 0{,}5924.$$

Приклад 5.53. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 210 - x^2, \qquad p = 12x + 50.$$

Розв'язання: Знайдемо точку ринкової рівноваги (x_0, p_0) з розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} p = 210 - x^2 \\ p = 12x + 50 \end{cases}; \qquad \begin{array}{l} 210 - x^2 = 12x + 50; \\ x^2 + 12x - 160 = 0; \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 8 \\ x_2 = -20 \ \text{(не має сенсу)} \end{array}\right. \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 8; \quad p_0 = 210 - 8^2 = 210 - 64 = 136.$$

Отже, точка ринкової рівноваги $x_0 = 8$, $p_0 = 136$.

Знайдемо виграш користувачів (5.66):

$$C = \int_0^8 (210 - x^2)dx - 8 \cdot 136 = \left(210x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^8 - 1088 =$$

$$= 1680 - 170{,}67 - 1088 = 421{,}33 \ \text{(грош. од.)}.$$

Знайдемо виграш постачальників (5.67):

$$P = 8 \cdot 136 - \int_0^8 (12x + 50)dx = 1088 - (6x^2 + 50x)\Big|_0^8 =$$

$$= 1088 - 384 - 400 = 304 \ \text{(грош. од.)}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1985.
2. Боревич З.И. Определители и матрицы. - М.: Наука, 1988. – 184 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. -712 с.
5. Пискунов Н.С. Диференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 430 с.
6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. М.: Физматгиз, 1963. – 748 с.
7. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 270 с.
8. Высшая математика для экономистов. / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 479 с.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. -432 с.
10. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М. Высшая школа, 1966. – 460 с.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.
12. Ганич Д.І., Олійник И.С. Російсько-український, українсько-російський словник. – К.: А.С.К., 1996. – 550 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Коваленко Людмила Борисівна

В И Щ А М А Т Е М А Т И К А
д л я м е н е д ж е р і в

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск С. О. Станішевський

Редактор М. З. Аляб’єв

Комп'ютерне верстання Л. Б. Коваленко

Підп. до друку 22.03.2010 Формат 60x84 1/16 Друк на ризографі
Ум. друк. арк. 16,0 Тираж 300 пр. Зам. № 5860

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: *rectorat@ksame.kharkov.ua*
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи: *ДК №731 від 19.12.2001*